

Libro pensamiento matemático II

Modalidad semiescolarizada



Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Armando Flórez Arco
César Pilar Quintero Campos

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes.

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del pensamiento aritmético, algebraico y geométrico ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento probabilístico y estadístico. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestro más sincero agradecimiento. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Efraín Meza Valdez	UAP La Cruz
Martín Luna Belmar	
Abril Liseth Fierro Romero	UAP Los Mochis
Jesús Antonio García Duarte	
Yadira Esmeralda Gutiérrez Esquivel	
Adriana Gutiérrez García	
Edith Ivett Ocampo Manjarrez	
Paola Elifelet Reyes Álvarez	
Erick Eduardo Romero Gómez	UAP CMDTE. Víctor M. Tirado
Adán Meza Sánchez	
Benito Uriel Terrazas Inzunza	UAP Navolato
Felipe de Jesús Sicairos Avitia	UAP CU Mochis
Ramiro Amezcua Reyes	

Rogelio Romero Fitch	
Paloma Sandoval Gámez	
María del Pilar Madrid Solís	
José Humberto Romero Fitch	
Heriberto Carlos Ayala Cruz	
Oscar Mauricio Heredia Ruiz	
Horacio Gabriel López Ramírez	
Sandra Araceli Arreola Mora	AUP Heraclio Bernal
Jorge Ramos Martínez	UAP Escuinapa
Luis Felipe Flores Tirado	UAP Dr. Salvador Allende
Policarpo Sicairos Avitia	
Santiago Meza Olivas	UAP Hermanos Flores Magón
Asia Cecilia Carrasco Valenzuela	
Ismael Aranda Estrada	UAP Rubén Jaramillo
Iliana Tirado Olivas	
Jorge Radney Montgomery Leyva	
Guadalupe Elevier Hernández Trejo	UAP Valle del Carrizo
Juana María Armenta Trasviña	
Silvia Bojórquez Soto	
Claudia Edith Carrillo Castillo	
Juan Carlos Pazos Robles	UAP Guasave Diurna
Arturo Trasviña López	
Reyna Jesus Trasviña López	
Joel Acosta Orozco	
Nereyda de Jesús Díaz Gustavo	UAP 8 de Julio extensión Dr. Gabino Barreda de Juan Aldama
Juan Antonio León López	
Melesio de Jesús Niebla Sotelo	UAP 8 de julio
Izeth Sarai Rivera Diaz	
Zayto Baltazar Peñuelas Borboa	UAP Los Mochis Extensión Macapule
Fernando Tomás Gil Camacho	
Anarelli Corona Cárdenas	UAP Victoria Del Pueblo
Carmen Leonor Castro Millán	
María Esther Franco González	UAP Vladimir Ilich Lenin
Yoanna Marisol Mercado Lizarde	
Eva Edith Verdugo Serrano	
Alma Rosario Gámez Vázquez	UA Preparatoria Ruiz Cortines
Daniela Castro Miranda	
Irma del Carmen Jacobo Melo	UAP Emiliano Zapata
Poignet Ayala Zazueta	
Jorge Aldivar Contreras Espinoza	
Lorena Leal Montoya	
Clarissa López Aboyte	UAP Casa Blanca
María del Rosario Llanes Molinero	
Nereyda Beatriz González López	
Rubén Abel Castro León	
Ramón Chávez Valenzuela	UAP Central Diurna
Fernando Eleazar Acosta Cruz	DGEP

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Pensamiento Matemático II para el bachillerato semiescolarizado de la UAS (adaptado del libro Pensamiento Matemático II para el bachillerato escolarizado de la UAS), que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato semiescolarizado en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Pensamiento Matemático II del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al segundo cuatrimestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato modalidad mixta opción mixta de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:

un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento probabilístico y estadístico.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Pensamiento Matemático II desarrollan el pensamiento probabilístico y estadístico para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. El lenguaje natural y el lenguaje matemático.
- PA 2. Las expresiones algebraicas.
- PA 3. Resolución de problemas utilizando el lenguaje algebraico.
- PA 4. Relaciones entre números enteros.
- PA 5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- PA 6. El conjunto de los números reales.
- PA 7. Proporcionalidad directa e inversa.
- PA 8. Elementos de matemática financiera.
- PA 9. Figuras geométricas planas y su área.

- PA 10. Elementos básicos de geometría analítica.
- PA 11. Resolución de problemas aplicando funciones lineales, cuadráticas y polinomiales.
- PA 12. Resolución de problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una evaluación diagnóstica; luego, le sigue una situación contextualizada, ejemplos formativos y una evaluación formativa diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño. Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Tabla Categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático II

Pensamiento Matemático II			
Categorías			
C1 Procedural	C2 Procesos de intuición y razonamiento	C3 Solución de problemas y modelación	C4 Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	S1 Capacidad para observar y conjeturar	S1 Uso de modelos	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	S2 Pensamiento intuitivo	S2 Construcción de modelos	S2 Negociación de significados
	S3 Pensamiento formal	S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	S3 Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver	M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o	M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de	M1-C4 Describe situaciones o fenómenos

problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Contenido

Dedicatoria y agradecimientos	2
Presentación.....	4
Tabla Categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático II.....	6
PA 1. El lenguaje natural y el lenguaje matemático.....	9
PA 2. Las expresiones algebraicas	17
PA 3. Resolución de problemas utilizando el lenguaje algebraico	31
PA 4. Relaciones entre números enteros.....	42
PA 5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.....	53
PA 6. El conjunto de los números reales.....	64
PA 7. Proporcionalidad directa e inversa	74
PA 8. Elementos de matemática financiera	85
PA 9. Figuras geométricas planas y su área.....	99
PA 10. Elementos básicos de geometría analítica.....	117
PA 11. Resolución de problemas aplicando funciones lineales, cuadráticas y polinomiales	129
PA 12. Resolución de problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica.....	147

El lenguaje natural y el lenguaje matemático

Progresión de aprendizaje 1

Compara considerando sus aprendizajes de trayectoria, el lenguaje natural con el lenguaje matemático, para observar que este último requiere de precisión y rigurosidad.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A		
	C		
	H		

Seguramente te comunicas a diario con tus compañeros de grupo, amigos o familiares, utilizando diferentes expresiones y junto con el lenguaje común, mezclas términos o expresiones de las matemáticas que has aprendido y que te resultan cómodos para simplificar lo que estás comunicando. Las expresiones, o símbolos matemáticos que utilizas en esas formas de comunicarte, forman parte del lenguaje matemático, el cual tiene un significado propio y preciso, aspectos muy importantes en el contexto y la comprensión de esta disciplina; comencemos analizando qué tanto haces uso de expresiones de ese tipo.

Evaluación diagnóstica 1.1

1. Relaciona ambas columnas:

Mi fin de semana estuvo muy x
Mi recámara mide 2.6 m por 2.85 m
Miércoles de 3×2 en el cine
$y + 3 = 7$, $y = 4$ es la solución
♥ Te quiero hasta el ∞
Te veo en la KZ llevo raspa2

Lenguaje matemático
Lenguaje natural

2. ¿Qué diferencias consideras que existen entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático?

En vacaciones navideñas el abuelo de Camila los visitó. Al llegar a la casa, el abuelito la invitó a ir de compras. Al entrar a la tienda de autoservicio, el abuelito observó en la sección de artículos para automóviles el siguiente anuncio: “Llantas de \$ 3,300.00 con un 35 % de descuento”, ¿cuánto pagaría el abuelito por una llanta para su automóvil?

También había una oferta de 3×2 en la compra de las llantas, ¿cuánto pagaría el abuelo por sus cuatro llantas?

Al regresar a casa, Camila se dio cuenta que su abuelito estaba muy cansado y se preguntó qué diferencia de edad existe entre ellos, así que decidió preguntarle: ¿qué edad tienes abuelito? y el abuelito, con agilidad mental le contestó: el cuadrado de tu edad menos el cuádruplo de esta, disminuido en 22. Camila, que tiene 12 años, se quedó pensando en la edad de su abuelito y cómo calcularla.

Es común que cuando vamos a hacer las compras nos encontremos con alguna oferta, como el clásico 3×2 en algunos de nuestros productos favoritos. Al ver esto, sabemos que se trata de la compra de tres productos al precio de dos sin necesidad de leer un enunciado largo o una explicación.

Esto, es uno de los tantos ejemplos del uso del lenguaje matemático para facilitar la representación de situaciones cotidianas y es posible que ni siquiera lo hayas notado.

Así, comenzaremos esta Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) con razonamientos de tipo matemático que nos permitirán representar fenómenos y solucionar problemas de diferente índole a través de un lenguaje particular, asociado a las matemáticas, y que se compone de reglas basadas en las propiedades de los números reales y las operaciones que podemos realizar con ellos.

Lenguaje natural y lenguaje matemático

Así como nuestro idioma posee reglas gramaticales para estructurar oraciones y/o hacer traducciones como en las plataformas de diversas redes sociales; en matemáticas, hay ciertas estructuras a seguir para hablar o traducir esa locución al lenguaje natural.

En general, el **lenguaje natural** o común es el que empleamos a través de un código (compuesto por el abecedario) o lenguaje, por lo que a partir de este podemos relacionarnos diariamente.

El **lenguaje matemático** es una forma de traducir a símbolos y números el lenguaje natural; así, se puede expresar cualquier cantidad con símbolos fáciles de escribir, para simplificar expresiones.

El **Álgebra** es una rama de las matemáticas que en su estudio emplea números, letras y signos para indicar las operaciones aritméticas. Con el fin de manejar el lenguaje matemático:

- Se usan todas las letras del abecedario.
- Las primeras letras se usan como valores conocidos o constantes.
- Las últimas letras se emplean como valores no conocidos o variables.

En lo adelante, vas a realizar una serie de actividades diseñadas para explorar las distinciones entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Estas actividades te permitirán, adentrarte en la esencia de la precisión matemática en contraste con la riqueza y flexibilidad del lenguaje cotidiano.

De hecho, las expresiones matemáticas que se utilizan en el lenguaje común, pueden no tener el mismo significado que cuando se utilizan formalmente en el lenguaje matemático, como es el ya mencionado 3×2 , si se refiere, en un caso, a una oferta de productos en un mercado o, en el otro, al producto de dos números naturales.

Sin embargo, se trata no sólo de entender sus diferencias, sino también apreciar cómo pueden complementarse para transmitir conceptos con claridad y eficacia en una variedad de situaciones.

En la siguiente tabla, puedes identificar las expresiones o términos del lenguaje natural que más se utilizan para reconocer diferentes operaciones matemáticas:

Términos para identificar las operaciones en lenguaje matemático			
Suma	Adición, aumentar, exceder, más, agregar.	Al cuadrado	Elevado a la 2.
Resta	Sustraer, diferencia, menos, disminuir, menos que, quitar.	Al cubo	Elevado a la 3.
Multiplicación	Producto, por, multiplicado por, tantas veces	Igual	Igual a, igualdad.
División	Cociente, entre, dividido por, razón de, porción, parte.		

¿Recuerdas lo que dijo el abuelo a Camila sobre su edad? Para traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático esa expresión, puedes destacar algunas palabras que resultan claves:

“el **cuadrado** de tu edad **menos** el **cuádruplo** de esta, **disminuido** en 22”.

Así, de acuerdo con la tabla anterior si la edad de Camila se representa por x , entonces podemos sustituir las palabras en negritas por la operación matemática que se

le asocia y se obtiene la expresión, en lenguaje matemático, que representa la edad del abuelo: $x^2 - 4x - 22$.

Ejemplo formativo 1.1

1. Representa en lenguaje matemático las siguientes expresiones:

- Un número cualquiera: x
- Un número cualquiera aumentado en dos: $x + 2$
- La mitad de un número disminuido en dos: $\frac{x}{2} - 2$
- Un número cualquiera es igual a la mitad de otro: $x = \frac{y}{2}$
- El triplo de la suma de dos números: $3(x + y)$
- La raíz cuadrada de un número, aumentada en dos unidades: $\sqrt{y} + 2$
- La raíz cuadrada de un número aumentado en dos unidades: $\sqrt{y + 2}$
- El cuadrado de un número disminuido en cinco unidades: $(z - 5)^2$
- El triplo de un número, más la raíz cuadrada de otro número: $3x + \sqrt{y}$
- La raíz cuadrada de la diferencia de dos números al cuadrado: $\sqrt{a^2 - b^2}$
- Ramiro compró una mochila y tres libretas, por las que pagó \$350.00: $3l = 350$

2. Escribe tres oraciones en lenguaje natural (Ln) y reescríbelas en lenguaje matemático (Lm).

- Ln: La suma de un número y tres es igual a siete.
Lm: $x + 3 = 7$
- Ln: El producto de dos números es mayor que diez.
Lm: $x \cdot y > 10$
- Ln: El doble de un número menos cuatro es igual a doce.
Lm: $2x - 4 = 12$

Ingresa código QR 1.1 y juega con la actividad que se presenta.



QR. 1.1. Lenguaje matemático
y lenguaje natural.
Fuente: Parzibyte 2024.

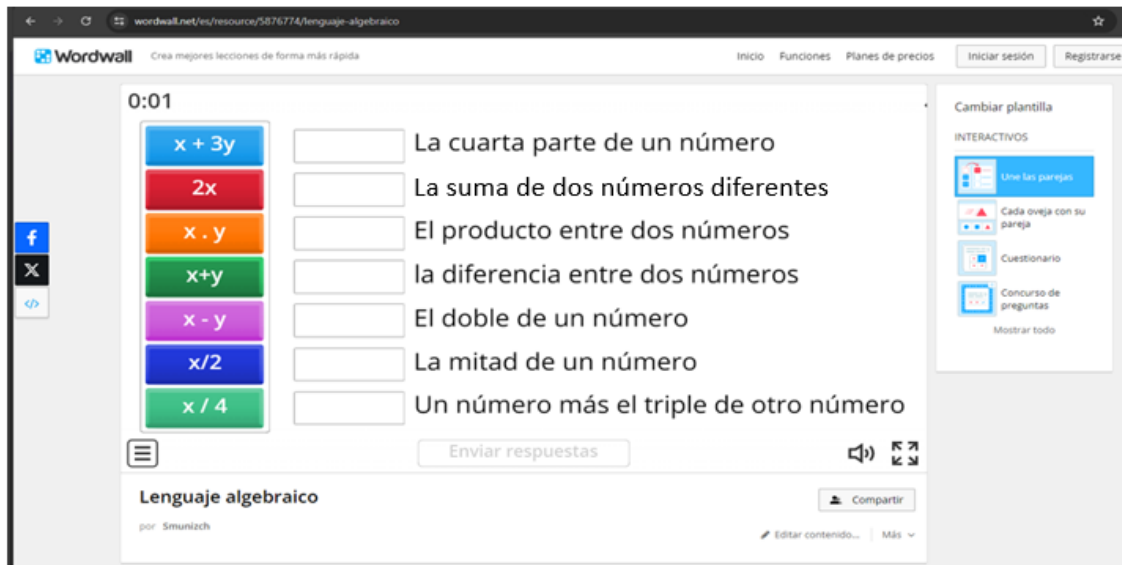


Figura 1.1. Traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático.
Fuente: Wordwall (Smunizch, 2024).

A pesar de que estamos familiarizados con letras y símbolos matemáticos como el “=”, la letra “x” para las incógnitas, la cruz “×” para el producto y muchos otros, estos no siempre se utilizaron para escribir ecuaciones y enunciados.

Por ejemplo, los antiguos textos árabes y egipcios de matemáticas, apenas contenían símbolos, y sin ellos, ya podemos imaginar lo extensos que debían ser.

Sin embargo, fueron los mismos matemáticos musulmanes quienes comenzaron a desarrollar el lenguaje algebraico desde la Edad Media. Pero fue el matemático y criptógrafo francés François Viète (1540-1603) el primero, que se sepa, en escribir una ecuación usando letras y símbolos.

Algún tiempo después, el matemático inglés William Oughtred escribió un libro que publicó en 1631, donde hacía uso de símbolos como la cruz para el producto y el símbolo de proporcionalidad \propto , que aún se emplean en la actualidad.

Con el correr del tiempo y el aporte de muchos científicos, se fue desarrollando toda la simbología que se maneja hoy en día en las escuelas, universidades y distintos ámbitos profesionales.

Para conocer más sobre el origen de algunos de los símbolos matemáticos puedes ingresar al código QR1.2.



QR. 1.2. Origen de algunos de los símbolos matemáticos.

Fuente: Parzibyte 2024.

Ejemplo formativo 1.2

Retomemos el ejemplo del abuelo de Camila planteado al inicio de la progresión sobre la compra de las llantas para el auto. Si se le llama x al precio de una llanta, expresa en lenguaje algebraico:

1. El precio ya rebajado de una llanta con el 35% de descuento: $0.75 \cdot x$
2. El precio de comprar cuatro llantas, cada una con el 35% de descuento: $4(0.75 \cdot x)$
3. El precio de comprar seis llantas ya que están en oferta de 3x2: $6(0.75 \cdot x)$

Evaluación formativa 1.1

1. Utiliza la inteligencia artificial para obtener una caracterización del lenguaje natural y del lenguaje matemático y establece las diferencias entre ambos.

a) Lenguaje natural:

b) Lenguaje matemático:

c) Diferencias entre:

Lenguaje natural	Lenguaje matemático

2. Completa la siguiente tabla, escribiendo el dato faltante en el lado en blanco.

Lenguaje natural o común	Lenguaje matemático
Suma de dos números cualesquiera.	
	$x \cdot y$
Cociente entre dos números.	
	$(a + c)^2$
	$c^2 = a^2 + b^2$
La diferencia de b al cuadrado con c al cuadrado.	

El doble de un número.	
	$3a^2$
El cubo de un número.	
	$2x + y^3$
Producto de dos números negativos.	
	$2x + x^2$
La suma de tres números consecutivos.	
	$(x - y)^2$

3. Expresa en lenguaje algebraico, las siguientes situaciones planteadas en lenguaje natural:

a) Si a la edad de Pedro se le aumentan 5, este tendrá el doble de edad que Julia.

b) El ahorro de mis padres se incrementó en una cuarta parte. _____

c) Imagina que estás ahorrando para comprar un nuevo teléfono. Decides ahorrar una cantidad fija de dinero cada semana, y hasta ahora has ahorrado durante cinco semanas. Tu hermano también está ahorrando, pero ha decidido ahorrar el doble de la cantidad que tú ahorras cada semana. Expresa matemáticamente la cantidad de dinero que ha ahorrado tu hermano.

d) Si el euro se encuentra a un precio de \$21.56 pesos mexicanos, ¿qué expresión algebraica permite convertir pesos mexicanos a euros? _____

Autoevaluación y coevaluación 1.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconocí que el lenguaje matemático es más preciso y riguroso en comparación con la flexibilidad del lenguaje natural (M1-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 1 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconoció que el lenguaje matemático es más preciso y riguroso en comparación con la flexibilidad del lenguaje natural (M1-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa.

Las expresiones algebraicas

Progresión de aprendizaje 2

Revisa algunos elementos de la sintaxis del lenguaje algebraico considerando que en el álgebra, buscamos la expresión adecuada al problema que se pretende resolver (utilizamos la expresión simplificada, la expresión desarrollada de un número, la expresión factorizada, productos notables, según nos convenga).

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno, algebraico e iconográfico.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 2.1

Es importante conocer e identificar términos, que sirven para comprender el lenguaje matemático como un idioma que debemos dominar, para desarrollar el pensamiento matemático. Busca el término matemático correspondiente a cada concepto que aparece en el siguiente crucigrama.

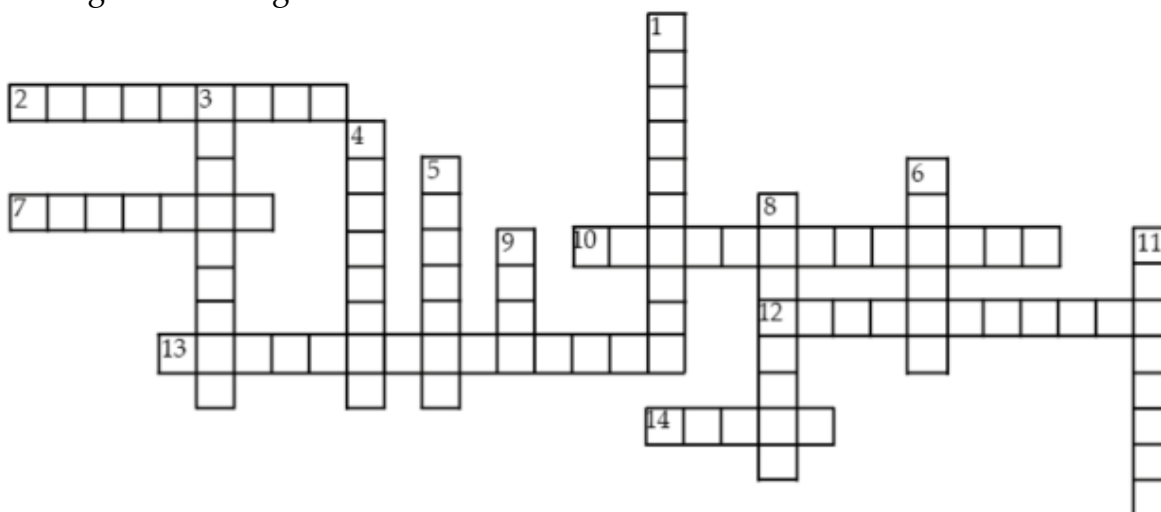


Figura 2.1. Crucigrama de términos matemáticos.
Fuente: Elaboración propia, (Excel, 2024).

Horizontal

2. Son aquellos números que se obtienen, al multiplicar un número n por cualquiera de los números naturales.
7. Expresión compuesta de dos términos algebraicos unidos por los signos (+) o menos (-).
10. Se define como la descomposición de una expresión matemática en forma de multiplicación.
12. Proceso matemático que sirve para separar y clasificar las unidades de un número, cifra por cifra.
13. Consiste en escribir de la forma más sencilla posible términos semejantes, combinándolos y reduciendo la expresión a su forma más básica
14. Operación que consiste en sacar, recortar, empequeñecer, reducir o separar algo de un todo.

Vertical

1. Sirven para dar prioridad a las operaciones que están dentro de ellos
3. Expresión algebraica compuesta por la suma de dos o más términos
4. Expresión algebraica compuesta de tres términos unidos por los signos más (+) o menos (-)
5. Expresión algebraica que consta de un solo término
6. Números naturales que pueden dividir exactamente a otro número.
8. Resultado de realizar la operación matemática de multiplicación.
9. Operación matemática que resulta al reunir en una sola varias cantidades.
11. Expresiones que se componen de cuatro elementos: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Banco de respuestas:

Múltiplos, binomio, polinomio, simplificación, trinomio, monomio, suma, agrupación, factorización, producto, resta, descomponer, factor, términos. (Colocarlas dentro del crucigrama)

¿Imaginas cómo sería el universo si no hubiera movimiento? La ley que permite entender las causas del movimiento es la segunda ley de Newton, la cual dice que:

“La aceleración de un objeto, es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él e inversamente proporcional a la masa”.

¿Qué significa la expresión anterior y cómo puede expresarse en lenguaje matemático?

Significa que para que un objeto se mueva rápidamente, debes aplicarle mucha fuerza, pero también, que la rapidez con la que se mueve el objeto dependerá de qué tan liviano o pesado es. En esta ley interactúan tres elementos: fuerza (F), aceleración (a) y masa (m) y se expresa de la siguiente forma:

$$F = ma$$

Las fórmulas que utilizamos en la física, la química o en las matemáticas contienen números y letras. Observa algunos ejemplos:

$$v = d/t \quad H_2O \quad A = l \cdot l = l^2 \quad P = l + l + l + l = 4l$$

En ellas se aprecian combinaciones de números y letras, que dan un significado en lenguaje matemático a lo que representan del lenguaje natural o común.

Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas son combinaciones de números (constantes) y letras (variables), que representan cantidades desconocidas y que aparecen relacionados con uno o más signos de las operaciones aritméticas (+, -, ×, ÷, √, potenciación). En una expresión algebraica no aparece el signo de igualdad (=).

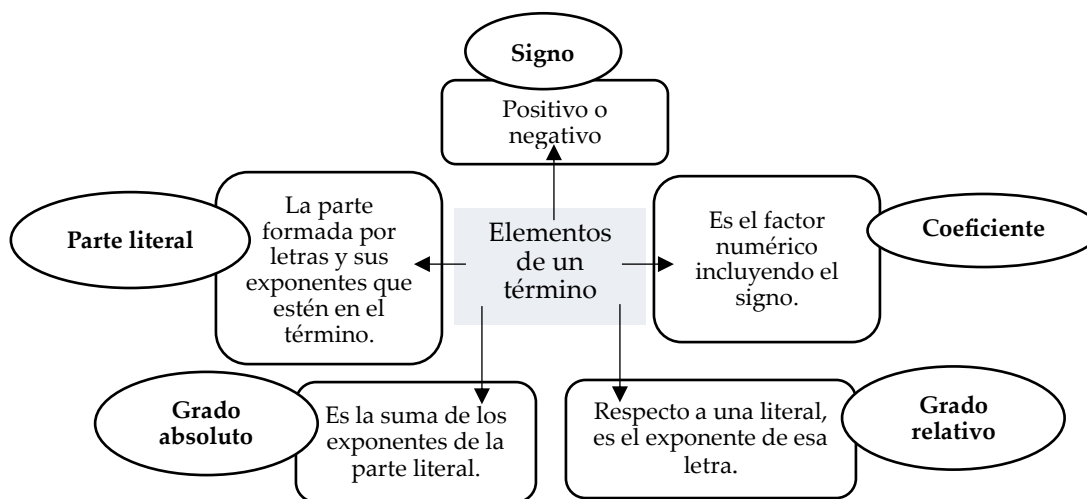


Figura 2.2. Elementos que conforman el monomio.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

En álgebra, se llama **término algebraico**, a toda expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos (+ o -) como se muestra en la Figura 2.2.

Por ejemplo:

- En el término algebraico: $-6xy^2$, su signo es negativo; el coeficiente es -6 ; la parte literal es xy^2 ; el grado relativo a la literal x , es 1; el grado relativo a la literal y , es 2; el grado del término algebraico es $1 + 2 = 3$.
- En el término algebraico: $6xy^{-2}$, su signo es positivo; coeficiente es 6; parte literal es xy^{-2} ; el grado relativo a la literal x , es 1; el grado relativo a la literal y , es -2 ; el grado del término algebraico es $1 - 2 = -1$.

En particular, un **monomio** es un término algebraico, en el que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y potencias de exponente no negativo. Por ejemplo, $2x^2y^3z$ es un monomio, pero $2x^2y^{-3}z$ no lo es.

Ejemplo formativo 2.1

1. Coloca en los espacios vacíos los nombres correspondientes a los elementos de la expresión que aparece en la Figura 2.3.

Identifica cada uno de los elementos de un término algebraico.

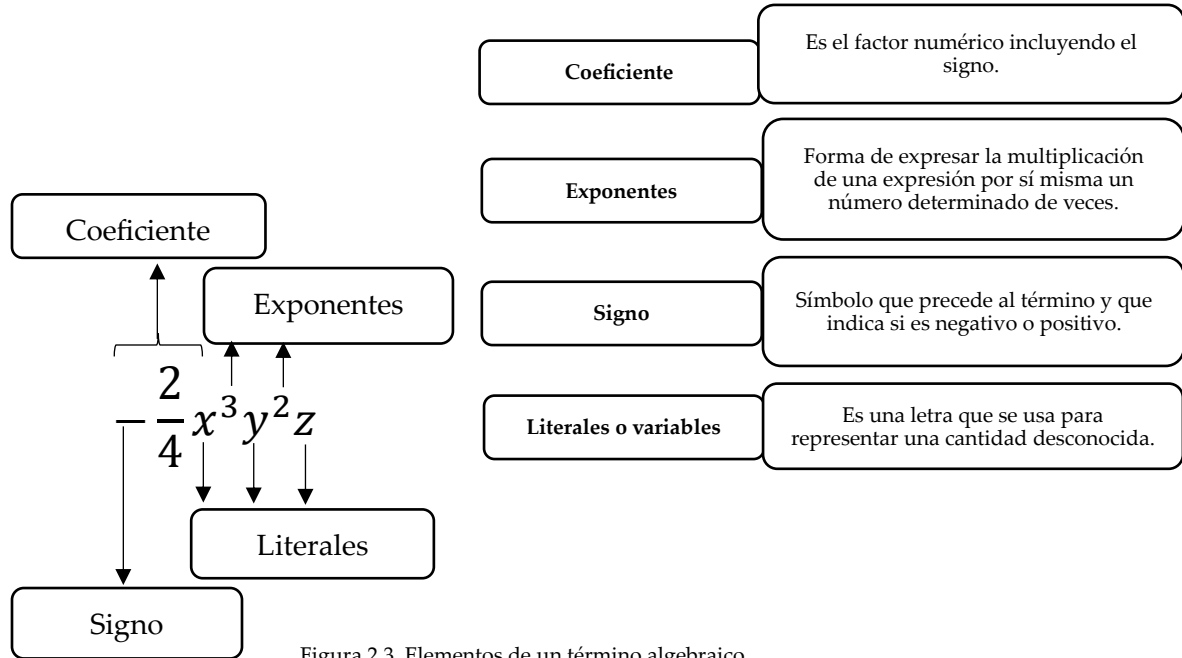


Figura 2.3. Elementos de un término algebraico.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

2. Completa la siguiente tabla.

Término	Signo	Coficiente	Parte literal	Grado relativo	Grado absoluto
$-3xy^2z$	-	3	xyz	G.R. (x) = 1	4
$2xyz^3$	+	2	xyz	G.R. (z) = 3	5
$\frac{5}{4}ab^4$	+	$\frac{5}{4}$	ab	G.R. (b) = 4	5
$-\sqrt{4}x^6y^5$	-	$\sqrt{4}$	xy	G.R. (x) = 6	11
$\sqrt{\frac{16}{4}}a^2bc^3$	+	$\sqrt{\frac{16}{4}}$	abc	G.R. (a) = 2	6

Simplificación de expresiones algebraicas

Los términos algebraicos que poseen las mismas partes literales y exponentes se les conoce como **términos semejantes**. Son términos semejantes, por ejemplo:

$$4x, -7x \qquad 12x^3y^4, \frac{-x^3y^4}{4} \qquad 5a^2b^3c, a^2b^3c$$

La **reducción de términos semejantes**, es una operación algebraica que resulta de las relaciones aritméticas entre los términos semejantes, permitiendo convertir dos o más términos en una sola expresión, es decir, para reducirlos se realiza la suma algebraica de sus coeficientes de acuerdo con la ley de los signos para la suma, y a este resultado se le coloca la parte literal en común.

Por ejemplo, observa la reducción de términos semejantes en la siguiente expresión:

$$2a - b - 5a + 5b$$

Términos semejantes:

$$2a, -5a$$

$$-b, 5b$$

Simplificación:

$$2a - 5a = -3a$$

$$-b + 5b = 4b$$

Luego $2a - b - 5a + 5b = -3a + 4b$.

$$\begin{aligned} \text{De igual forma, } 25p^3 - 6pq^2 - 10p^3 + 8pq^2 - q^3 &= 25p^3 - 10p^3 - 6pq^2 + 8pq^2 - q^3 \\ &= 15p^3 + 2pq^2 - q^3 \end{aligned}$$

Ejemplo formativo 2.2

Simplifica a su mínima expresión las siguientes expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned} 1. \quad 4ax - 10bx - 9bx - 4ax &= 4ax - 4ax - 10bx - 9bx \\ &= -19bx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 5xy^2 + 3x^2y + 2xy^2 + 3 + 2x^2y + 5 + 3 + 4xy^2 &= \\ &= 5xy^2 + 2xy^2 + 4xy^2 + 3x^2y + 2x^2y + 3 + 5 + 3 \\ &= 11xy^2 + 5x^2y + 11 \end{aligned}$$

Las expresiones algebraicas formadas por sumas, restas y multiplicaciones de dos o más monomios, se les llama **polinomios**. Son aquellas expresiones algebraicas donde las variables solo tienen exponentes enteros no negativos; se llama **grado del polinomio**, al mayor de los grados de los términos que lo componen. De acuerdo con la cantidad de elementos que posee el polinomio, se les denomina, en algunos casos, de forma particular:

- binomios, cuando tienen dos términos.
- trinomios, si constan de tres términos.

Son ejemplos de polinomios:

- $x^2 - y^2$, es un binomio; en este caso de dos variables y de segundo grado porque los dos monomios que lo integran son de grado dos.
- $m^3 + 2m^3n + n^2$, es un trinomio en dos variables y de grado cuatro, que es el grado que resulta de la suma de los exponentes de m y n en el monomio $2m^3n$.
- $3x^4 + x^3 - 2x^2 + 0.5x - 3$, es un polinomio de cuarto grado en una variable.

Productos notables

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas, a menudo encontramos situaciones en las que tenemos que multiplicar dos o más expresiones entre sí y en algunos casos, podemos encontrar atajos para llegar al resultado siguiendo reglas fijas, sin necesidad de realizar la multiplicación paso a paso. Estos casos son llamados productos notables, y constituyen una herramienta útil para multiplicar expresiones algebraicas de manera rápida y sencilla, aplicando reglas simples basadas en la propiedad distributiva y de la potenciación.

La propiedad distributiva simbólicamente la podemos expresar como:

$$a(b + c) = ab + ac, \text{ con } a, b \text{ y } c \text{ números reales} \quad (\text{Observa que "a" queda como factor común de los términos.})$$

Ejemplo formativo 2.3

Aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma en las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

1. $2(y + 5)$

2. $xy(2x - 3)$

3. $(a + b)(a - b)$

Al aplicar la propiedad distributiva se obtiene:

1. $2(y + 5) = 2 \cdot y + 2 \cdot 5 = 2y + 10$

2. $xy(2x - 3) = xy \cdot 2x - xy \cdot 3 = 2x^2y - 3xy$

3. $(a + b)(a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Supón ahora que quieres calcular el cuadrado de un binomio, es decir $(a + b)^2$ y para ello te basas en lo que significa la potencia dos y la propiedad distributiva:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Así, se obtiene una expresión que es común recordar, como una regla, cuando se trata de elevar un binomio al cuadrado u otros casos como se muestran en la tabla:

Ejemplos de productos notables		
Binomios al Cuadrado		Binomios Conjugados
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
El cuadrado de la suma de dos números, es igual a la suma de los cuadrados de cada número, más el doble producto de ellos.	El cuadrado de la diferencia de dos números, es igual a la suma de los cuadrados de cada número, menos el doble producto de ellos.	El producto de la suma de dos números y su diferencia, es igual al cuadrado del primer número, menos el cuadrado del segundo número.

Existe una relación muy interesante entre los productos notables y su interpretación geométrica, relacionada con el área de figuras geométricas, como puedes apreciar en el siguiente enlace:



QR. 2.1. Demostración geométrica de productos notables.

Fuente: Parzibyte 2024.

Otros productos indicados también constituyen productos notables, ya que pueden obtenerse a través de reglas de formación del resultado sin necesidad de realizar los productos paso a paso, y que de manera general pueden aplicarse con expresiones equivalentes, permitiendo simplificar las operaciones algebraicas. Un resumen de estos productos notables aparece en la siguiente Tabla 2.1.

Producto notable	Expresión
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomios con término común	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + b^2$
Binomios de la forma $(ax + b)$	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Cubo de un binomio	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Binomio por un trinomio	$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Tabla 1.1 Productos notables.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Ejemplo formativo 2.4

Cálculo de productos aplicando los productos notables.

1. $(x + 2)^2 =$
2. $(x - 2)(x + 2) =$
3. $(x + 1)^3 =$
4. $(x - 1)(x^2 + x + 1) =$

Resolución:

Identifica en cada caso la regla que corresponde al producto notable

1. $(x + 2)^2 = x^2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot x = x^2 + 4x + 4$ (Binomio al cuadrado).
2. $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$ (Suma por diferencia).
3. $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (Cubo de un binomio).
4. $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ (Binomio por un trinomio).

Factorización de polinomios

En forma análoga a la que un número natural puede expresarse como el producto de varios factores, existen procedimientos con los cuales se puede descomponer un polinomio en factores más simples, proceso que se le llama **factorización de polinomios**.

La factorización permite descomponer un polinomio en factores o expresiones más básicas, facilitando así las operaciones algebraicas y permite una mayor comodidad en los cálculos.

Una forma simple de factorización es el **factor común**, se lleva a cabo cuando en una expresión algebraica, pueden identificarse elementos que aparecen en todos los términos y entonces estos se extraen de cada término como un factor que multiplica.

Por ejemplo, en la expresión $2ab^2 - 4a^2b + 2ab$, puedes ver como $2ab$ se repite, $2ab^2 - 2 \cdot 2aab + 2ab$, de manera que es un factor común y se puede escribir

$$2ab^2 - 4a^2b + 2ab = 2ab(b - 2a + 1).$$

De igual manera, los productos notables, vistos en sentido contrario a como se aplicaron, constituyen la factorización de los polinomios a los que dieron origen. Por ejemplo, $a^2 + 2ab + b^2$ recibe el nombre de **trinomio cuadrado perfecto**, pues se puede escribir o factorizar como $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ que como puedes ver, es la forma contraria en que se desarrolló el producto notable del binomio al cuadrado. (Ver Tabla 2.2).

Ejemplo formativo 2.5

En la siguiente tabla puedes ver a través de ejemplos, cómo se factorizan algunos tipos de polinomios, haciendo uso de los productos notables.

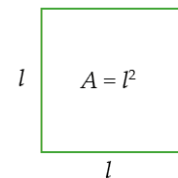
Factor común	Diferencias de cuadrados
<p>$3x^2 + 6x$</p> <p>Se identifica el factor común entre los términos: $3x$</p> <p>Por lo tanto, el polinomio $3x^2 + 6x$ factorizado es:</p> $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$	<p>$z^2 - 9$</p> <p>Se factoriza como la suma por diferencia de un binomio.</p> <p>Por lo tanto, $z^2 - 9$ se factoriza como:</p> $z^2 - 9 = (z + 3)(z - 3)$ <p>De igual forma:</p> $64x^2 - 36y^2 = (8x + 6y)(8x - 6y)$ $\sqrt{64x^2} = 8x \quad \sqrt{36y^2} = 6y$
Trinomio cuadrado perfecto	Trinomio cuadrado de la forma $(x^2 + px + q)$
<p>$x^2 + 6x + 9$</p> <p>Como $6x = 2 \cdot 3x$ y $9 = \sqrt{9}$, para factorizar, se extraen las raíces cuadradas del primero y último término y se colocan como un binomio elevado al cuadrado.</p> <p>Por lo tanto, $x^2 + 6x + 9$ se factoriza como:</p> $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$	<p>$x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$</p> <p>Se factoriza como el producto de dos binomios con término común x, donde a y b son dos números cuya suma algebraica sea p y cuyo producto sea q, es decir: $a + b = p$ y $a \cdot b = q$.</p> <p>Ejemplos:</p> <p>$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, con $(2 + 3 = 5; 2 \cdot 3 = 6)$</p> <p>$x^2 - 2x + 8 = (x - 4)(x + 2)$, con $(-4 + 2 = -2; 2 \cdot 3 = 6)$</p>

Tabla 2.2 Factorización de polinomios.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Ejemplo formativo 2.6

Si el área de un cuadrado es $9x^2 + 6xy + y^2$, ¿cuál es la expresión para su lado?

El área de un cuadrado como sabes, es $A = l^2$,
donde l es la longitud del lado del cuadrado



Si analizas el trinomio, puedes observar que:

$$9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2(3x)y + y^2$$

Por lo que, es un trinomio cuadrado perfecto y se puede factorizar como:

Figura 2.4. Área de un cuadrado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

$$9x^2 + 6xy + y^2 = (3x + y)^2$$

De donde se obtiene que la expresión para el lado del cuadrado es: $l = 3x + y$

Evaluación formativa 2.1

Contesta las siguientes preguntas con base a lo aprendido en esta progresión.

1. Simplifica a su mínima expresión las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\frac{2}{3}mn - \frac{1}{6}mn + \frac{1}{2}m^2n^2 - \frac{3}{4}mn + m^2n^2 =$

b) $6ab^2 - 2a^2b + 5ab^2 - ab - a^2b + 2ab^2 + 2ab + 3a^2b =$

c) $xyz^2 - 2x^2yz + 5xy^2z + 2xyz^2 - 2x^2yz + 3xy^2z + 4x^2yz =$

2. Aplica las reglas de los productos notables para obtener el resultado de:

a) $(x - 3)^2 =$

b) $(x - 4)^3 =$

c) $(x + 2)(x - 2) =$

d) $(x - 4)(x + 4) =$

e) $(x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$

3. Halla la descomposición factorial de:

a) $x^3 - x =$ _____

b) $x^2y^3 - 5x^3y^2 =$ _____

c) $9s^2 - 4 =$ _____

d) $r^2 - 10r + 25 =$ _____

e) $2x^2 - 12x + 18 =$ _____

f) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 =$ _____

g) $s^2 - 10z + 21 =$ _____

h) $x^2 - 24x - 25 =$ _____

4. Un terreno rectangular mide 5 metros más de largo que de ancho. Si su área es igual a 84 m^2 , ¿cuáles son sus dimensiones?

5. Observa la Figura 2.5. ¿Cuál es el área de la parte sombreada? Calcúlala de dos maneras diferentes.

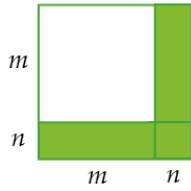


Figura 2.5. Área por secciones.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

- Un agricultor quiere realizar el mapeo de su terreno, y lo ha representado mediante símbolos matemáticos. Si en el plano, tiene representado el largo del terreno como $(x + 8)$ y el ancho de este como $(x + 5)$, ¿cuál sería la expresión para el área de dicho terreno?



Autoevaluación y coevaluación 2.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ___ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 2. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Realicé cálculos utilizando los productos notables y la factorización de polinomios en la resolución de problemas (M1-C1).			
Compartí mis métodos de trabajo sobre los procesos que utilicé en la solución de problemas (M2-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Realizó cálculos utilizando los productos notables y la factorización de polinomios en la resolución de problemas (M1-C1).			
Compartió sus métodos de trabajo sobre los procesos que utilizó en la solución de problemas (M2-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Resolución de problemas utilizando el lenguaje algebraico

Progresión de aprendizaje 3

Examina situaciones que puedan modelarse utilizando lenguaje algebraico y resuelve problemas, en los que se requiere hacer una transliteración entre expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje simbólico del álgebra.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Actividad diagnóstica 3.1

Escribe en cada paréntesis, la letra de la expresión algebraica que mejor representa cada oración.

Oración	Expresión algebraica
() La edad de Aarón es el doble que la de Brandon, y ambas edades suman 36.	a) $A = \frac{b \cdot h}{2}$
() El precio de una camisa menos su quinta parte es de 250 pesos.	b) $4x + 5 = 3(x + 5)$
() La mitad de la suma de dos números es 48.	c) $x + 2x = 36$
() El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	d) $x - \frac{x}{5} = 250$
() La edad de un padre actualmente, es el cuádruplo de la edad de su hijo y dentro de cinco años será el triple.	e) $x + (x + 1) + (x + 2) = 156$
() El doble de un número excede en 48 a la mitad del mismo número.	f) $x - y = 15$

() El largo de un terreno rectangular es el doble del ancho y su perímetro es 105 m.	g) $c^2 = a^2 + b^2$
() La suma de la cuarta y quintuple parte de un número, equivale al triple del mismo número disminuido en 15.	h) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
() La suma de tres números consecutivos es 156.	i) $\frac{a+b}{2} = 48$
() La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.	j) $2x - \frac{x}{2} = 48$
() El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.	k) $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 3x - 15$
() La diferencia de dos números es 15.	l) $2(2x) + 2(x) = 105$



Si lo prefieres, puedes realizar tu evaluación diagnóstica usando el siguiente código QR 3.1.



QR 3.1. Evaluación diagnóstica.
Fuente: Parzibyte 2024.

Viaje en el tiempo

La historia de la modelación algebraica se remonta a la antigua Babilonia, donde se utilizaban tablillas de arcilla para resolver problemas matemáticos, las cuales son un ejemplo de modelación algebraica. En estas tablillas se encontraron problemas matemáticos que involucraban ecuaciones lineales y cuadráticas, así como métodos para resolverlos. Los antiguos babilonios, utilizaban un sistema posicional de numeración y técnicas algebraicas para resolver problemas relacionados con el comercio, la construcción y la administración.

El uso de la modelación algebraica, sentó las bases para el desarrollo posterior del álgebra y su aplicación en una amplia gama de campos.



¿Sabías qué?

La capacidad de representar situaciones reales mediante ecuaciones y expresiones algebraicas, nos permite comprender y predecir fenómenos de una manera más precisa y eficiente.

Un estudiante puede emplear la modelación algebraica al momento de planear un viaje. Puede usar ecuaciones para calcular el tiempo de llegada en función de la velocidad y la distancia, o bien para determinar el costo total considerando diferentes gastos como combustible, casetas de cobro, alimentación y hospedaje. También puede utilizar la modelación algebraica para analizar datos financieros, como el crecimiento de inversiones a lo largo del tiempo.

Imagina poder aplicar la modelación algebraica en el entorno escolar al analizar el consumo de energía eléctrica de tu escuela, donde en compañía de tus compañeros, recopiles datos sobre el consumo de electricidad durante diferentes períodos de tiempo, como meses o años, y luego usar esa información para crear un modelo algebraico que represente el consumo de energía a lo largo del tiempo.

Con este modelo, pueden predecir el consumo futuro, identificar tendencias y patrones, y proponer estrategias para optimizar el uso de la energía eléctrica en la escuela. Esta actividad, no solo les permite aplicar conceptos algebraicos, sino que también les ayuda a comprender la importancia de la eficiencia energética y la sostenibilidad en su entorno escolar. ¿Te gustaría lograrlo?

El uso del lenguaje algebraico es muy útil cuando se necesite resolver problemas donde se requiera de relaciones matemáticas y se presenten valores desconocidos o variables.

Ejemplo formativo 3.1

Determina la expresión algebraica que representa el problema descrito.

1. María acude al dentista para una evaluación diagnóstica, la cual tiene un costo de \$500; al finalizar su consulta, el doctor le dice que necesita realizarse una limpieza, por la cual cobra \$20 por minuto.

Costo de la evaluación diagnóstica: \$500

Limpieza dental: \$20 por minuto

Minutos que dura la limpieza: x

Modelo matemático: $500 + 20x$

2. Marcos produjo el doble de toneladas de maíz que Antonio, y Carlos el doble de Marcos, entre todos hicieron una producción de 240 toneladas.

Producción de maíz de Antonio: m

Producción de maíz de Marcos: $2m$

Producción de maíz de Carlos: $2(2m)$

Producción total: 240 toneladas

Modelo matemático: $m + 2m + 2(2m) = 240$

3. Perla fue a la papelería a comprar una libreta y tres plumas y pagó 148.

Costo de una libreta: a

Costo de una pluma: b

Costo total de la compra: \$148

Modelo matemático: $a + 3b = 148$



El gavilán y las 100 palomas

Adiós mis 100 palomas dijo un gavilán a una parvada de palomas. No somos 100 dijo una paloma, si sumamos las que somos, más tantas como las que somos, más la mitad de las que somos, y la mitad de la mitad de las que somos, en ese caso, contigo, gavilán, seríamos 100. ¿Cuántas palomas son?

Figura 3.1. Palomas.

Fuente: Susana Rosique.

¿Podrás modelar una expresión algebraica para saber cuántas palomas son?

Una vez que has ejercitado la modelación matemática, es decir, traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje matemático, también es importante, a partir de expresiones matemáticas, el desarrollar habilidades en diseñar en lenguaje natural situaciones o problemas de la vida cotidiana y/o de algunas ciencias.

Ejemplo formativo 3.2

Plantea una situación de tu contexto que se ajuste a cada una de las expresiones algebraicas siguientes.

Expresión algebraica	Situación de tu contexto
$2x + y = 20$	El doble de la cantidad de billetes de 50 pesos que tienes más la cantidad de billetes de 100 pesos que tienes es igual a 20 billetes en total.
$m^2 + n^2$	El área de un cuadrado de lado m más el área de otro cuadrado de lado n .

Cuando tienes que plantear un modelo matemático para resolver un problema, donde se presentan uno o más valores desconocidos, se sigue una serie de pasos que permitan comprenderlo y, partiendo de tus conocimientos previos, encontrar el o los valores desconocidos. Para ello nos basaremos en los cuatro pasos que sugiere George Pólya, sobre la resolución de problemas.



¿Sabías qué?

George Pólya fue un matemático húngaro, nacido en Budapest en 1887. Desarrolló una amplia variedad de contribuciones al campo de la matemática entre ellas la teoría de la resolución de problemas. Si quieres conocer más sobre su biografía consulta el código QR 3.2.



Figura 3.2. George Pólya.

Fuente: Instituto de matemáticas UNAM.

QR 3.2. Biografías de matemáticos: George Pólya.

Fuente: Parzibyte 2024.

Su método para resolver problemas, hace uso de los conocimientos previos y de las habilidades del pensamiento, mediante los siguientes pasos:

Paso 1. Comprender el problema

Para resolver un problema, es necesario comprender bien su enunciado, lo que significa leer y comprender completamente el problema, identificar la información dada con los datos necesarios para resolverlo, lo que es desconocido y se necesita encontrar. Es importante responderse preguntas como:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?

- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

Paso 2. Concebir un plan

En este paso se utilizan los conocimientos previos, la intuición y creatividad para elaborar una estrategia con la, o las operaciones necesarias para resolver el problema y transcribirlo al lenguaje matemático que permita resolverlo.

En ello, y muy relacionado con la comprensión del problema, contribuye el hacer una figura auxiliar, una tabla, buscar un patrón de comportamiento de los datos obtenidos, o dividir el problema en partes, entre otras estrategias para lograr el plan de solución.

Paso 3. Ejecutar el plan

En este paso, se deben implementar la o las estrategias seleccionadas para solucionar completamente el problema, siguiendo cuidadosamente las reglas, propiedades y secuencias de las operaciones que se ejecuten.

Paso 4. Visión retrospectiva

En este último paso, se tiene la posibilidad de revisar el trabajo y asegurarse de no haber cometido algún error, es importante responderse preguntas como:

- ¿Es la solución correcta?
- ¿La respuesta satisface lo establecido en el enunciado del problema?
- ¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?

Si al resolver los problemas empleas en forma consciente y cuidadosa cada uno de los anteriores pasos, aprenderás a diseñar y poner en práctica estrategias que te permitan alcanzar el éxito.

Veamos un ejemplo de cómo puedes resolver problemas utilizando expresiones algebraicas y basándonos en estos cuatro pasos.

Ejemplo formativo 3.3

Un grupo de alumnos de la Preparatoria Guasave Diurna, está trabajando en el desarrollo de un proyecto sustentable que pueda ser replicable por todos los alumnos en diferentes escalas. Consiste, en la creación de un huerto escolar con espacios asignados para los diferentes vegetales que se pretenden cultivar.

La distribución del huerto quedó de la siguiente manera:

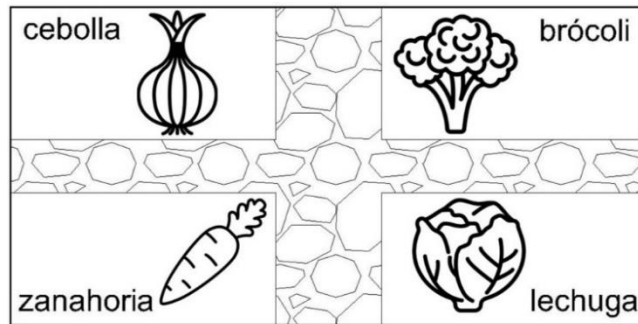


Figura 3.3. Distribución del huerto escolar.
Fuente: Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

Para determinar las medidas del huerto y su distribución, se consideraron las especificaciones que se enuncian a continuación:

- El terreno disponible para realizar el huerto, mide de largo 36 metros, mientras que su ancho sólo ocupa una tercera parte de éste, ¿cuánto mide de ancho el huerto?
- El pasillo horizontal del huerto, tiene un ancho igual a $1/12$ del ancho total del huerto, ¿cuánto mide de ancho el pasillo horizontal?
- El pasillo vertical del huerto, tiene el doble de ancho del pasillo horizontal, ¿cuánto mide de ancho el pasillo vertical?

Si has encontrado las medidas anteriores, ¿cuáles son las dimensiones del cultivo de cebolla?, si se sabe que los pasillos están perfectamente alineados al centro.

• **Comprender el problema (identificar los datos)**

Datos:

Largo del terreno: 36 metros.

Ancho del terreno: $1/3$ del largo del huerto.

Ancho pasillo horizontal: $1/12$ del ancho del huerto.

Ancho pasillo vertical: el doble de ancho del pasillo horizontal.

• **Concebir un plan (definir la expresión algebraica que dé solución al problema)**

Considerando las asignaciones de valores y las variables asignadas para cada elemento se hace la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Largo del terreno (x): 36 metros.	$x = 36$
Ancho del terreno (a_1): $1/3$ del largo del huerto.	$a_1 = \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$
Ancho pasillo horizontal (a_2): $1/12$ del ancho del huerto.	$a_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x}{36}$

Ancho pasillo vertical (a_3): el doble de ancho del pasillo horizontal.	$a_3 = 2 \cdot \frac{x}{36} = \frac{2x}{36} = \frac{x}{18}$
---	---

- **Ejecutar el plan (resolver la expresión algebraica anterior)**

Largo del terreno: $x = 36 \text{ m} \rightarrow x$ tomó el valor de 36 como se indica en el problema.

Ancho del terreno: $a_1 = \frac{x}{3} = \frac{36}{3} = 12 \text{ m} \rightarrow$ se substituyó el valor de x .

Ancho del pasillo horizontal: $a_2 = \frac{x}{36} = \frac{36}{36} = 1 \text{ m} \rightarrow$ se substituyó el valor de x .

Ancho del pasillo vertical: $a_3 = 2 \cdot \frac{x}{36} = \frac{36}{18} = 2 \text{ m} \rightarrow$ se substituyó el valor de x .

Para resolver la pregunta final sobre las dimensiones del cultivo de cebolla, se hace uso de un esquema como el de la Figura 3.4.

Largo y ancho del cultivo de cebolla:

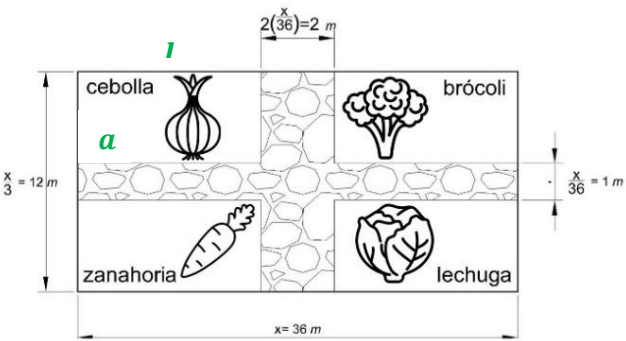
$$l = \frac{36-2}{2} = 17 \text{ m} \quad a = \frac{12-1}{2} = 5.5 \text{ m}$$


Figura 3.4. Dimensiones del huerto.
Fuente: Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

- **Visión retrospectiva (examinar resultados)**

Al hacer la comparación entre lo planteado inicialmente y las medidas obtenidas, puedes concluir que los resultados encontrados son los correctos, ya que, el largo del terreno es 36 metros, su tercera parte es 12 metros; dando como resultado el ancho del terreno; la doceava parte del ancho del terreno es un metro, dando como resultado el ancho del pasillo horizontal y el doble del pasillo horizontal es dos metros, que es el ancho del pasillo vertical.

Ahora puedes responder la pregunta final, ¿cuáles son las dimensiones del cultivo de cebolla?, si se sabe que los pasillos están perfectamente alineados al centro. **Las dimensiones del cultivo de cebolla son 17 m de largo y 5.5 m de ancho.**

Evaluación formativa 3.1

Analiza la siguiente situación y diseña expresiones algebraicas que te permitan representar cada una de las afirmaciones (una expresión para cada afirmación). Al finalizar desarrolla el procedimiento para llegar a la solución de cada incógnita.

1. El conjunto de canchas de voleibol y basquetbol de la Preparatoria Guasave Diurna, forman un polígono que tiene un perímetro total de 120 metros. Tomando en cuenta que, el conjunto forma un polígono cuadrado perfecto ¿cuánto medirá cada lado?

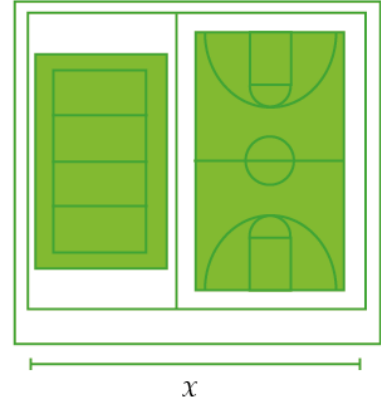


Figura 3.5. Canchas de voleibol y basquetbol.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

2. El área que cubre el terreno de juego de la cancha de voleibol, es igual a una quinta parte del total de los metros cuadrados del conjunto de canchas. ¿Cuánto mide el terreno de juego de la cancha de voleibol?
3. El área de juego de la cancha de basquetbol, menos el área de juego de la cancha de voleibol es igual a 240 m^2 . ¿Cuál es el área de juego de la cancha de basquetbol?
4. ¿A cuántos metros cuadrados equivalen dos tercios del total del conjunto de las canchas? Demuestra, que la suma de las áreas de juego de las canchas de voleibol y basquetbol, es igual a dos tercios del total del área del conjunto.

5. Tomando en cuenta que el piso del conjunto de canchas, tiene una superficie de 900 m² y un espesor 0.12 m, ¿cuál es el volumen que ocupa en el espacio? (Nota: el espesor es la altura del piso con respecto a suelo).

Autoevaluación y coevaluación 3.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué los procedimientos aprendidos en la resolución de problemas (M2-C1)			

Elaboré expresiones matemáticas para representar cómo resolver problemas, identificando los datos conocidos y los que se requieren determinar. (M2-C3)			
Utilicé adecuadamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural para describir diferentes situaciones. (M1-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 3 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Aplicó los procedimientos aprendidos en la resolución de problemas (M2-C1)			
Elaboró expresiones matemáticas para representar cómo resolver problemas, identificando los datos conocidos y los que se requieren determinar. (M2-C3)			
Utilizó adecuadamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural para describir diferentes situaciones. (M1-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Relaciones entre números enteros

Progresión de aprendizaje 4

Explica algunas relaciones entre números enteros utilizando conceptos como el de divisibilidad, el de número primo, o propiedades generales sobre este conjunto numérico, apoyándose del uso adecuado del lenguaje algebraico.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 4.1

1. ¿Qué entiendes por divisibilidad?

2. Un grupo de agricultores quiere dividir una parcela de tierra de 144 hectáreas entre ocho familias. ¿Es posible dividir la tierra en partes iguales para cada familia? ____ ¿Por qué? _____

3. Selecciona la opción correcta:

I. Número natural mayor que uno, tiene solo dos divisores distintos: uno y sí mismo.

- a) Números enteros
- b) Números primos
- c) Números compuestos

II. Conjunto numérico que abarca los números naturales, el cero y los números negativos y además no tienen parte decimal.

- a) Números enteros
- b) Números primos
- c) Números compuestos

III. Números naturales mayores que uno, que tienen más de dos divisores distintos.

- a) Números enteros
- b) Números primos
- c) Números compuestos

¡Bienvenidos al emocionante mundo de los números enteros!

En este fascinante viaje matemático, exploraremos el conjunto de los números enteros. A lo largo de nuestras vidas hemos usado diferentes tipos de números; por ejemplo, para contar objetos, utilizamos los números naturales. Si necesitamos expresar ganancias y pérdidas, movimientos hacia adelante y hacia atrás, cambios en la temperatura, etc. no son suficientes los números naturales. Los números enteros son la clave para dar respuesta a estas interrogantes.

La biblioteca es un lugar donde las historias cobran vida y el conocimiento se expande. En este espacio lleno de libros, cada ejemplar tiene su propio lugar designado, sin embargo, este como cualquier edificio necesita reparaciones y mejoras para mantener el lugar en óptimas condiciones. Cuando esto sucede, es necesario encontrar soluciones temporales para almacenar los libros mientras se realizan las tareas de mantenimiento. Para garantizar que los libros estén seguros y accesibles durante este tiempo, es fundamental tener un plan para almacenarlos temporalmente en otro lugar. Aquí entran en juego las operaciones con los números enteros y sus propiedades.

Números Enteros

Su origen se remonta a las civilizaciones antiguas, donde se desarrollaron sistemas de numeración simples para contar objetos y representar cantidades. Los números naturales, que son los enteros positivos, fueron los primeros en ser utilizados. Con el tiempo, surgió la necesidad de representar situaciones como deudas, pérdidas o posiciones por debajo de cero. Esta idea de números negativos, no fue completamente aceptada inicialmente y tomó tiempo para su desarrollo y aceptación en diversas culturas. Aproximadamente en el siglo XVI llegan a Europa y hasta el siglo XVIII no se generaliza su uso. Los números enteros pueden ser positivos, negativos o cero.



¿Sabías qué?

La letra que se utiliza para identificar su conjunto es la **Z**. Se utiliza esta letra ya que es la primera letra de la palabra alemana *Zahlen* que significa números.

Propiedades de los números enteros

Con los números enteros resolvemos situaciones que se nos presentan cotidianamente, para ello, necesitamos conocer las operaciones que podemos realizar y las propiedades que satisfacen. Sabemos que es un conjunto ordenado, porque sus elementos los podemos ordenar, que es algo que hacemos en la vida real, por ejemplo, comparar precios, estaturas, temperaturas, edades, etc. Con los números enteros podemos realizar las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Los números enteros satisfacen las siguientes propiedades (ver la siguiente tabla), donde a , b y c representan números enteros.

Propiedad	Operación	Notación	Significado	Ejemplo
Cerradura	Suma	$a + b \in Z$	La suma de dos números enteros es un número entero.	$6 + 7 = 13$ $-6 + (-7) = -13$
	Multiplicación	$ab \in Z$	El producto de dos números enteros es un número entero.	$(11)(3) = 33$ $(11)(-3) = -33$
Conmutativa	Suma	$a + b = b + a$	El orden al sumar números enteros no afecta el resultado.	$6 + 7 = 7 + 6$
	Multiplicación	$(a)(b) = (b)(a)$	El orden al multiplicar números enteros no afecta el resultado.	$(11)(2) = (2)(11)$
Asociativa	Suma	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Se pueden hacer diferentes asociaciones al sumar y no se afecta el resultado.	$(4 + 6) + 3 = 4 + (6 + 3)$
	Multiplicación	$(a \cdot b)(c) = (a)(b \cdot c)$	Se pueden hacer diferentes asociaciones al multiplicar y no se afecta el resultado.	$[(11)(3)](1) = (11)[(3)(1)]$
Distributiva	Suma respecto a la multiplicación	$(a)(b + c) = (a)(b) + (a)(c)$	El factor se distribuye a cada sumando.	$(6)(4 + 5) = (6)(4) + (6)(5)$
Identidad	Suma	$a + 0 = a$	Todo número entero sumado a 0 se queda igual; el cero es el idéntico aditivo.	$13 + 0 = 13$ $(-13) + 0 = -13$
	Multiplicación	$(a)(1) = a$	Todo número entero multiplicado por 1 se queda igual; el 1 es el idéntico multiplicativo.	$(13)(1) = 13$ $(-13)(1) = -13$
Inversos	Suma	$a + (-a) = 0$	La suma de un número y su opuesto es 0.	$-13 + 13 = 0$ $13 + (-13) = 0$
	Multiplicación	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1, a \neq 0$	El producto de un número diferente de cero y su recíproco es 1.	$\left(\frac{1}{6}\right)(6) = 1$ o $(-6)\left(\frac{-1}{6}\right) = 1$

Divisibilidad

El término *divisibilidad*, se refiere a la propiedad que tiene un número entero de dividirse por otro número entero y obtener un resultado también entero. En otras palabras, un número a es divisible por otro número b si al dividir a entre b el residuo es **cero**. Ello nos lleva al concepto de **divisor**, que es aquel número que está contenido en el primero una

cantidad exacta de veces.

Los principios generales de divisibilidad son consecuencia del desarrollo alcanzado por la teoría de los números. Los indios llegaron a conocer la divisibilidad entre 3, 7 y 9. El matemático francés Blas Pascal, propuso las reglas para determinar la divisibilidad entre cualquier número.

Criterios de divisibilidad

La divisibilidad nos permite comprender como los números se relacionan entre sí. Existen reglas que nos permiten determinar si un número es divisible entre otro sin necesidad de realizar la división, conocidas como criterios de divisibilidad, algunos de ellos se muestran en la siguiente tabla:

Divisibilidad	Criterio	Ejemplos
Entre 2	Termina en 0 o en un dígito par.	12, 24, 400, 568
Entre 3	La suma de los valores absolutos de sus dígitos es múltiplo de 3.	27, 600, 1356, 4575
Entre 4	Sus dos últimos dígitos de la derecha son 0 o múltiplo de 4.	124, 416, 568, 6000
Entre 5	Termina en 0 o 5.	10, 25, 500, 755
Entre 6	Se puede dividir simultáneamente entre 2 y entre 3.	24, 36, 180, 282
Entre 7	Separando el último dígito de la derecha, multiplicándolo por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da 0 o múltiplo de 7.	$217 \rightarrow 21, 7 \times 2 = 14$ $\quad \quad \quad \underline{-14}$ $\quad \quad \quad \quad 7$ $2058 \rightarrow 205, 8 \times 2 = 16$ $\quad \quad \quad \underline{-16}$ $\quad \quad \quad 189 \rightarrow 18, 9 \times 2 = 18$ $\quad \quad \quad \quad \underline{-18}$ $\quad \quad \quad \quad \quad 0$
Entre 8	Sus tres últimos dígitos de la derecha son ceros o múltiplo de 8.	5680, 6512, 7000
Entre 9	La suma de los valores absolutos de sus dígitos es múltiplo de 9.	36, 72, 810
Entre 10	Termina en 0	50, 170, 1230, 5840



¿Sabías qué?

El Fuerte fue la primera capital de Sinaloa

El Fuerte, Sinaloa, es una ciudad con un rico legado histórico que se remonta a la época colonial. Fundada en 1593 por Diego Martínez de Hurdaide, esta ciudad fue un importante centro de producción agrícola y comercial durante siglos. Entre sus productos más reconocidos se encuentran los mangos, famosos por su sabor excepcional y calidad superior.

Ejemplo formativo 4.1

Don Manuel, un agricultor de El Fuerte, Sinaloa, tiene una huerta de mangos con 150 árboles de mangos "Ataulfo". Cada árbol produce en promedio 220 mangos por temporada. Don Manuel quiere vender sus mangos en cajas de diferentes tamaños: **cajas pequeñas:** 12 mangos cada una, **cajas medianas:** 20 mangos cada una y **cajas grandes:** 30 mangos cada una.

1. ¿Cuántos mangos en total produce la huerta de Don Manuel? 33,000 mangos.
$$150 \cdot 220 = 33000$$
2. ¿Cuántas cajas pequeñas puede llenar Don Manuel con la producción de toda su huerta? 2,750 cajas pequeñas.
$$33000 \div 12 = 2750$$
3. ¿El número 33,000 es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10? Fundamenta tu respuesta.
 - Termina en 0, por lo que es divisible entre 2.
 - La suma de los valores absolutos de sus dígitos es $|3 + 3 + 0 + 0 + 0| = 6$, seis es múltiplo de 3, por lo que seis es divisible entre 3.
 - Los dos últimos dígitos a la derecha de 33,000 son 00, por lo que es divisible entre 4.
 - Termina en 0, por lo que es divisible entre 5.
 - Dado que es divisible entre 2 y entre 3, entonces es divisible entre 6.
 - La suma de los valores absolutos de sus dígitos es $|3 + 3 + 0 + 0 + 0| = 6$, seis no es múltiplo de nueve, por lo tanto, seis no es divisible entre 9.
 - Termina en 0, por lo que es divisible entre 10.

4. Don Manuel sabe que las cajas pequeñas se venden a \$10.00 cada una, las medianas a \$15.00 y las grandes a \$20.00; si vende 90 cajas, la misma cantidad de cajas de cada tamaño, ¿cuánto dinero ganará en total? Ganará \$1,350.

$$90 \div 3 = 30$$
$$(10)(30) + (15)(30) + (20)(30) = (10 + 15 + 20)(30) = (45)(30) = 1350$$

5. Suponiendo que Don Manuel solo vende cajas grandes, ¿cuántos mangos necesita vender para obtener un ingreso de \$5,000? Necesita vender 7,500 mangos.

$$5000 \div 20 = 250$$
$$250 \times 30 = 7500$$

Números primos

Una vez revisadas las propiedades de los números enteros y los principios fundamentales de divisibilidad, es importante conocer que existe un tipo de números mayores que uno, que tienen únicamente dos divisores diferentes y que son enteros positivos (el 1 y el número mismo) conocidos como *números primos*, por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 29, 37, 97. Por convención el número 1 no se considera primo.

Un número entero $p \geq 2$ es **primo** si sus únicos divisores son **1 y p** .

Una de las características de los números primos es que hay una cantidad infinita de ellos, según demostró Euclides en la antigüedad. Además, su terminación es siempre: 1, 3, 7 y 9 (excluyendo de esta regla al 2 y al 5).

Un *número compuesto* o no primo, es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y entre el 1, lo es entre otro(s) factor(es), por ejemplo: el 14 es compuesto pues además de ser divisible entre 14 y 1, lo es también entre 2 y 7.

Un número entero $k \geq 2$ es **compuesto** si **no es primo**.

El *múltiplo* de un número es aquel que lo contiene un número exacto de veces, de tal manera que el 14 es múltiplo de 2 ya que el 14 contiene al 2 siete veces. Existe una forma práctica de obtener los números primos menores que 100.

La *criba de Eratóstenes*, es un algoritmo antiguo que te permite encontrar todos los números primos hasta un límite dado, a través del conocimiento del múltiplo de un número. Es importante señalar, que el número uno no cumple con la propiedad de tener

únicamente dos divisores enteros positivos, por lo que se excluye de la clasificación y es conocido como *unidad*.

Ejemplo formativo 4.2

Desafío de la Criba de Eratóstenes para encontrar todos los números primos entre 1 y 100.

Procedimiento: realiza los pasos descritos a continuación.

1. En la siguiente tabla tacha el 1.
2. comienza por el número 2 y tacha todos sus múltiplos (4, 6, 8, 10, etc.) de la tabla.
3. Encuentra el siguiente número sin tachar en la lista. Este número (3) es primo. Tacha todos los múltiplos (6, 9, 12, 15, etc.) de la tabla.
4. Repite el paso 3 con el siguiente número sin tachar en la tabla. Este número (5) es primo. Tacha todos los múltiplos (10, 15, 20, 25, etc.) de la lista.
5. Continúa repitiendo los pasos 3 y 4 hasta que el cuadrado del número que estás examinando sea mayor que 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 4.1. Criba de Eratóstenes.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Responde lo siguiente:

1. ¿Cuáles son los primeros 10 números primos? 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
2. ¿Cuántos números primos hay entre 1 y 100? Hay 25 primos.
3. ¿Cuál es el mayor número primo que encontraste? El 97.
4. ¿Por qué no es necesario tachar los múltiplos de un número que ya ha sido tachado?

La criba de Eratóstenes funciona eliminando los múltiplos de cada número primo a partir de 2, que es el primer número primo. Cuando llegas a un número que ya ha sido tachado, esto significa que ese número es múltiplo de algún número primo menor, y por lo tanto, todos sus múltiplos ya fueron tachados cuando se eliminaban los múltiplos de dicho número primo.

5. ¿Por qué razón se tachó el número 1?

El número 1 solo tiene un divisor positivo, que es él mismo. Como no cumple con la condición de tener exactamente dos divisores, no se clasifica como un número primo.

Los números primos tienen aplicaciones importantes en la criptografía, teoría de los números y otras áreas de las matemáticas e informática.

Ejemplo formativo 4.3

Cifrado de un mensaje.

En un proyecto de investigación en una clase de matemáticas de bachillerato, se está estudiando la seguridad de la información en la era digital. Se ha descubierto que uno de los métodos de encriptación más utilizados se basa en el uso de números primos. Para comprender mejor este método, el profesor pide a los estudiantes llevar a cabo el siguiente procedimiento para cifrar mensajes entre estudiantes y experimentar con ello esta estrategia tan interesante:

1. Primero, elegimos un número primo p como la clave pública.
2. Para cifrar un mensaje, convertimos cada letra en su valor numérico correspondiente sin considerar la letra Ñ ($A = 1, B = 2, \dots, Z = 26$).
3. Luego, multiplicamos cada valor numérico por la clave pública p . Para descifrar el mensaje, dividimos cada valor cifrado por la clave pública p .
4. Por ejemplo, si elegimos $p = 7$ como la clave pública, y queremos cifrar el mensaje "HOLA", haríamos lo siguiente:

$$H = 8, \text{ cifrado: } 8 \times 7 = 56$$

$$O = 15, \text{ cifrado: } 15 \times 7 = 105$$

$$L = 12, \text{ cifrado: } 12 \times 7 = 84$$

$$A = 1, \text{ cifrado: } 1 \times 7 = 7$$

Entonces, el mensaje cifrado sería: 56, 105, 84, 7.

5. Para descifrar, simplemente dividimos cada valor cifrado por la clave pública 7:

$$56 \div 7 = 8 (H)$$

$$105 \div 7 = 15 (O)$$

$$84 \div 7 = 12 (L)$$

$$7 \div 7 = 1 (A)$$

Así, obtenemos el mensaje original "HOLA".

Números primos relativos

- Números primos relativos (coprimos) entre sí, son dos o más números que solo tienen un divisor común que es el 1, por ejemplo, el 8 y el 15 porque su único factor común es 1. Observa que para que dos números sean primos entre sí, no necesariamente tienen que ser números primos.
- Números primos relativos entre sí dos a dos, son tres o más números tales que cada uno de ellos es primo con cada uno de los demás, por ejemplo: 8, 9 y 17 porque el 8 es primo con 9 y con 17, y el 9 es primo con 17.

Así, los números 10, 15, 21 y 16 son primos entre sí, porque el único factor que divide a todos es 1, pero no son primos dos a dos, ya que el 10 y 15 tienen como factor común al 5, el 15 y 21 tienen como factor común al 3, y el 10 y 16 tienen como factor común al 2.

Por lo tanto, si varios números son primos dos a dos, necesariamente son primos entre sí, pero siendo primos entre sí, pueden no ser primos dos a dos.

Teorema fundamental de la aritmética. Todo número entero mayor que uno se puede descomponer en factores primos, conocida como *descomposición prima*.

La descomposición prima es única, salvo por el orden (*unicidad*). Existe un método para llevarla a cabo, conocido como algoritmo de descomposición en factores primos. Hay diferentes versiones del algoritmo, pero todas se basan en la idea de dividir repetidamente el número por el primo más pequeño que lo divide hasta llegar a 1.

Por ejemplo, vamos a descomponer el número 36:

36	2	<ul style="list-style-type: none"> • Primero veamos si 36 es divisible entre 2 que es el número primo más pequeño. • Notamos que 36 entre 2 es 18, y buscamos divisibilidad entre 2 que es 9. • Vemos que 9 ya no es divisible entre 2, por lo que continuamos con el siguiente primo que es 3. • Así, 9 entre 3 es igual a 3, que es divisible entre 3 y terminamos al llegar a 1.
18	2	
9	3	
3	3	
1		

Por lo tanto, la descomposición prima de 36 es $(2)(2)(3)(3)$.

Para reforzar sobre este tema revisa el código QR 4.1



QR 4.1. Video descomposición de un número en factores primos.

Fuente: parzibyte 2024.

Evaluación formativa 4.1

1. ¿Cuántos múltiplos de 15 hay entre 25 y 100? _____
2. De los 240 libros de la Biblioteca se han seleccionado 24 ejemplares para realizar una donación a otra institución. Se ha solicitado enviarlos en cajas que sean todas iguales, sin que sobren ni falten libros. Investiga todas las opciones posibles para el envío de los libros.

3. Después de separar los libros para la donación se desea empacar los restantes en cajas que contengan 9, 10 o 16 libros. ¿Cuál de las opciones es posible para el empaque? Justifica la respuesta.

4. Identifica si los siguientes números son primos o compuestos. Justifica tu respuesta.

a) 119 _____

b) 573 _____

c) 333 _____

d) 149 _____

5. Atendiendo la Tabla 4.1, ¿cuál es el único número primo que es par? _____

6. Responde lo siguiente:

a) Cifra el mensaje "MATES" utilizando la clave pública $p = 7$.

b) Si recibes el mensaje cifrado 42, 70, 98, 105, descifralo utilizando la clave $p = 7$.

c) ¿Por qué es importante que la clave pública p sea un número primo en este sistema de cifrado?

7. Realiza la descomposición en factores primos de los siguientes números enteros:

24	_____

42	_____

60	_____

81	_____

8. Escribe la descomposición en factores primos de cada número:

24 = _____

42 = _____

60 = _____

81 = _____

Autoevaluación y coevaluación 4.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ___ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Comprendí las relaciones entre números enteros utilizando los conceptos de divisibilidad y de número primo (M2-C2)			
Compartí mis ideas e intercambié sobre los procedimientos que utilicé en la solución de problemas de divisibilidad (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, concluida la progresión de aprendizaje 4, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Comprendió las relaciones entre números enteros utilizando los conceptos de divisibilidad y de número primo (M2-C2)			
Compartió sus ideas e intercambié sobre los procedimientos que utilicé en la solución de problemas de divisibilidad (M2-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Progresión de aprendizaje 5

Conceptualiza el máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm) de dos números enteros y los aplica en la resolución de problemas.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 5.1

Lee detenidamente los siguientes enunciados y escribe en el paréntesis la letra que corresponde a la respuesta correcta:

- Es un múltiplo de 24. ()
 a) 8 b) 16 c) 30 d) 48
- Es un divisor de 8 . ()
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 6
- ¿Cuál es la cuarta parte del área de un salón que mide 6 m por 8 m? ()
 a) 4 m² b) 8 m² c) 12 m² d) 16 m²
- ¿Cuál de los siguientes es un número primo? ()
 a) 4 b) 9 c) 13 d) 24
- ¿Cuál de los siguientes es un número compuesto? ()
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

El máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm) son conceptos esenciales en matemáticas y particularmente en aritmética; tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas, desde la simplificación de fracciones hasta la optimización de recursos

en ingeniería y tecnología, así como la programación de actividades periódicas, la sincronización de procesos en computación y la resolución de problemas relacionados con la periodicidad de eventos.

Algunos ejemplos de aplicaciones del MCD pueden ser: en el reparto equitativo de objetos entre un grupo de amigos, en la industria el diseño de envases o cajas para empacar alguna cantidad exacta de productos, en la simplificación de proporciones en recetas de cocina, en la optimización de recursos que requieran dimensiones equitativas para su organización, así como la distribución de longitudes o áreas.

Un ejemplo de aplicación del MCD es el siguiente: para plantar diferentes cultivos, se quiere dividir en pequeñas parcelas cuadradas idénticas, una parcela escolar que es un terreno rectangular de 300 metros de largo y 180 metros de ancho, ¿cuál es el tamaño máximo de las parcelas cuadradas que se pueden crear sin desperdiciar terreno?

De las múltiples aplicaciones del mcm, se pueden mencionar algunas como: en los horarios de autobuses, en ciencias naturales se pueden encontrar fenómenos periódicos en el tiempo, en la vida cotidiana se pueden calcular tiempos de coincidencia entre eventos de diferentes frecuencias, ya sea entre personas u otros eventos.

Un ejemplo donde aplica el mcm es el siguiente: Luis y su papá practican ciclismo en la misma pista, pero sus rendimientos son diferentes. Luis, recorre la pista en 54 segundos, mientras que su papá tarda sólo 48 segundos. Si ambos inician su recorrido simultáneamente, ¿en cuánto tiempo estarán coincidiendo en el mismo punto de inicio de la pista?

Para encontrar respuestas a estos problemas, es necesario desarrollar procedimientos con algoritmos matemáticos que permitan determinar el MCD y el mcm como parte de la solución correspondiente, los cuales se estudian en esta progresión y se resolverán más adelante.

Múltiplos y divisores

En la multiplicación de números $a \times b$, a y b se llaman factores, por ejemplo $5 \times 6 = 30$, 5 y 6 son factores de 30, también 3 y 10 son otros factores de 30. De ahí se dice, que 30 es múltiplo de los factores 5 y 6. Estos factores se llaman también divisores de 30, ya que $30 \div 6 = 5$ y $30 \div 5 = 6$.

Con base en lo anterior, se concluye que **un múltiplo**, es el número que resulta de multiplicar un número natural (a) por otro número natural (b), incluso él mismo.

Ejemplo formativo 5.1

Si tomamos el número 3, algunos de sus múltiplos son:

$$3 \times 1 = 3$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times 4 = 12$$

..., etcétera.

Aquí, 3 es el número natural y 1, 2, 3, 4, ..., etc., son otros números naturales. Entonces, 3, 6, 9 y 12, ..., etc., respectivamente son múltiplos de 3. Se puede observar que cualquier número natural es múltiplo de sí mismo, ya que $a \times 1 = a$, para cualquier número natural a ; además, los múltiplos de un número natural pueden ser infinitos.

Un múltiplo de un número natural, es cualquier número, que resulta de multiplicar dicho número natural por otro número natural.

Además, **un divisor** de un número natural, es cualquier número que lo puede dividir de manera exacta (sin dejar residuo). Es decir, los factores de un número natural, se llaman también divisores de dicho número.

Ejemplo formativo 5.2

Si tomamos el número 30, sus divisores (o factores) son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30 porque:

$$\frac{30}{1} = 30, \quad \frac{30}{2} = 15, \quad \frac{30}{3} = 10, \quad \frac{30}{5} = 6, \quad \frac{30}{6} = 5, \quad \frac{30}{10} = 3, \quad \frac{30}{15} = 2, \quad \frac{30}{30} = 1$$

Aquí, 30 es el número natural y 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30, son otros números naturales que hacen las divisiones exactas para cada caso, por eso se dice que son divisores (o factores) de 30. Se puede observar que, cualquier número natural tiene como divisor a la unidad y a sí mismo, ya que $a \div 1 = a$ y $a \div a = 1$, para cualquier número natural a ; además, los divisores de un número natural son finitos.

Un divisor de un número natural, es cualquier número que lo divide de manera exacta, es decir, que su residuo es cero.

Máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm)

Entre los divisores de un número natural, existe uno mínimo (el uno) y otro máximo (el mismo número natural). El número uno, es un divisor o factor que le pertenece (es común) a todos los números y corresponde al elemento neutro de la multiplicación; sin embargo, no es número primo y no es un factor explícito en los procesos de factorización en números primos de los números.

El máximo común divisor (MCD) de dos números o más, es el número más grande que los divide exactamente sin dejar residuo. Por otro lado, el mínimo común múltiplo (mcm) es el número más pequeño, que es múltiplo común de dos números o más. Ambos conceptos son fundamentales en matemáticas, y tienen aplicaciones en la resolución de problemas de la vida real, especialmente en álgebra y aritmética.

En la Figura 5.1, pueden observarse algunas características de los múltiplos y los divisores, como son:

- Los múltiplos de cualquier número natural, siempre serán mayores o igual a dicho número, además, todos los números tienen infinitos múltiplos.
- Los divisores de cualquier número natural siempre serán menores o igual a dicho número, son limitados (finitos) y todos los números tienen como mínimo divisor el número uno, pero este no es número primo.

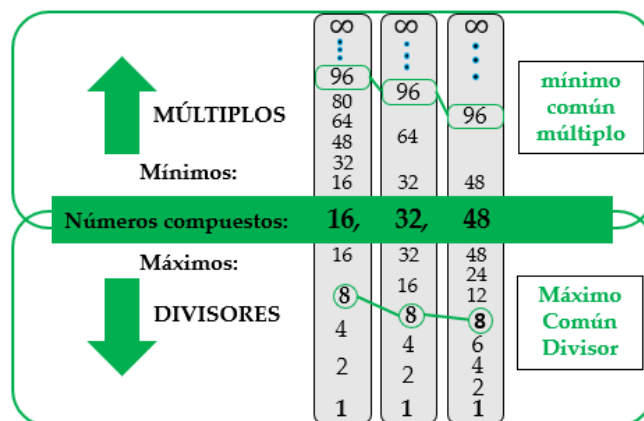


Figura 5.1. Mínimo común múltiplo (mcm) y máximo común divisor (MCD) de números compuestos.
Fuente: Elaboración propia (PowerPoint, 2024).

Máximo común divisor (MCD)

Existen muchos problemas donde es necesario determinar, lo que en aritmética se conoce como máximo común divisor (MCD).

Ejemplo formativo 5.3

En una fábrica de acero se quiere transportar varillas de 30 y 45 metros de longitud, pero, para facilitar y optimizar el transporte deben cortar las varillas en trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿De qué longitud deben cortarse los trozos de varilla?

Para resolver este problema se recomienda lo siguiente:

- Determinar el conjunto de divisores o factores de 30, que es

$$D_{(30)} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

- Determinar el conjunto de divisores o factores de 45, que es $D_{(45)} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
- Determinar el conjunto de divisores comunes, que es $D_{(30)} \cap D_{(45)} = \{1, 3, 5, 15\}$
- Identificar el mayor de los divisores comunes (15)
- Por lo tanto, la longitud máxima a la que deben cortarse las varillas es de 15 metros.

Para determinar el MCD de dos números naturales o más, de manera más práctica, se recomienda el siguiente algoritmo:

- Realizar la factorización prima de cada uno de los números, si hay divisores repetidos, expresarlos como potencias.
- Determinar el MCD, multiplicando los factores comunes de dichos números, aplicando los factores con el menor exponente.

Por ejemplo, el MCD de los números 24, 36 y 60, es:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{MCD}(24, 36, 60) = 2^2 \times 3 = 12$$

Para la aplicación del algoritmo matemático de MCD, se retoma el problema planteado al principio de esta progresión.

Ejemplo formativo 5.4

La parcela escolar, es un terreno rectangular de 300 metros de largo y 180 metros de ancho. Si se quiere dividir en pequeñas parcelas cuadradas idénticas para plantar diferentes cultivos, ¿cuál es el tamaño máximo de las parcelas cuadradas que puede crear sin desperdiciar terreno?

Resolución:

Se sabe que las dimensiones del terreno son 300 m de largo y 180 m de ancho.

Se pretende dividir el terreno en cuadrados, es decir de lados iguales. Esto indica que se debe calcular el MCD.

Para determinar el MCD de 300 y 180:

- Realizar la factorización prima de cada uno de los números.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

- Determinar el MCD, multiplicando los factores comunes de dichos números, aplicando los factores con el menor exponente.

$$\text{MCD}(300,180) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

Respuesta: el tamaño máximo de las parcelas cuadradas que puede crear sin desperdiciar terreno es de 60 m por lado (ver Figura 5.2).

1	2	3	4	5	60 m
6	7	8	9	10	60 m
11	12	13	14	15	60 m
60 m	60 m	60 m	60 m	60 m	

Figura 5.2. División y distribución de las parcelas (máximo común divisor).

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Mínimo común múltiplo (mcm)

Otros problemas frecuentes que se presentan en la Aritmética se refieren al mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números naturales.

Ejemplo formativo 5.5

En un árbol navideño hay tres extensiones de luces que parpadean cada cierto tiempo. La extensión $E_{(1)}$ parpadea cada 6 segundos, la extensión $E_{(2)}$ cada 10 segundos y la extensión $E_{(3)}$ cada 15 segundos. ¿Cada cuánto tiempo todas las extensiones parpadearán al mismo tiempo?

La solución se puede obtener contando los ciclos de tiempo (o frecuencias) de cada una de las extensiones eléctricas y a partir de ello se determinan los múltiplos de 6, 10 y 15.

1. Determinar los múltiplos de 6 de la $E_{(1)} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, \dots\}$
2. Determinar los múltiplos de 10 de la $E_{(2)} = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, \dots\}$
3. Determinar los múltiplos de 15 de la $E_{(3)} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, \dots\}$
4. Determinar los múltiplos comunes de $E_{(1)} \cap E_{(2)} \cap E_{(3)} = \{30, 90, \dots\}$
5. Identificar el mínimo de los múltiplos comunes, que es (30).
6. Por lo tanto, el tiempo para que todas las extensiones enciendan al mismo tiempo es de 30 segundos.

Para determinar el mcm de dos o más números naturales de una manera práctica, se recomienda el siguiente algoritmo:

1. Realizar la factorización prima de cada uno de los números, si hay divisores repetidos, expresarlos como potencias.
2. Determinar el mcm multiplicando todos los factores comunes y no comunes de dichos números, los factores comunes aplican con el mayor exponente.

Por ejemplo, el mcm de los números 54 y 120, es:

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$54 = 2 \times 3^3$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\text{mcm}(54, 120) = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$$

Para la aplicación del algoritmo matemático de mínimo común múltiplo, se retoma el problema planteado al principio de esta progresión.

Ejemplo formativo 5.6

Luis y su papá practican ciclismo en la misma pista, pero sus rendimientos son diferentes. Luis recorre la pista en 54 segundos, mientras que su papá, tarda sólo 48 segundos. Si ambos inician su recorrido simultáneamente, ¿en cuánto tiempo estarán coincidiendo en el mismo punto de inicio de la pista?

Resolución:

Se sabe que los tiempos (frecuencias) de recorrido son 54 s y 48 s, respectivamente. Se pretende determinar el tiempo que tardarán en coincidir en el número de vueltas (frecuencias). Esto indica que se debe calcular el mcm de esos dos números.

Para determinar el mcm de 54 y 48:

1. Realiza la factorización prima de cada uno de los números.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ \hline 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \times 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ \hline 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

2. Determina el mcm, multiplicando todos los factores comunes y no comunes de dichos números, los factores comunes aplican con el mayor exponente.

$$\text{mcm}(54,48) = 2^4 \times 3^3 = 432$$

Respuesta: el tiempo en que estarán coincidiendo en el mismo punto de inicio de la pista es de 432 s (7 minutos y 12 segundos).

Evaluación formativa 5.1

Lee, analiza y responde:

1. Escribe tres divisores y tres múltiplos del número 24. _____
2. Determina todos los divisores de 60. _____
3. De los divisores que obtuviste, ¿cuáles son números primos? _____
4. ¿Por qué a los divisores también se les llama factores? _____

5. Encuentra el MCD, de los siguientes números:

a) 180 y 756	b) 75 y 125	c) 15, 30 y 45	d) 96, 112 y 224
MCD(180,756) =	MCD(75,125) =	MCD(15,30,45) =	MCD(96,112,224) =

6. Encuentra el mcm de los siguientes números:

a) 24 y 32	b) 75 y 125	c) 24, 45 y 75	d) 24, 36 y 72
mcm(24,32) =	mcm(75,125) =	mcm(24,45,75) =	mcm(24,36,72) =

7. En una parada de camiones de pasaje en la ciudad de Culiacán, pasan tres rutas (A, B y C) que tienen diferentes frecuencias. Los camiones de la ruta A pasan cada 20 minutos, los de la ruta B cada 24 minutos y los de la ruta C cada 30 minutos. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán los camiones de las tres rutas en la parada?

8. Una base de datos, contiene tres tipos de tareas para realizar el proyecto final: 36 tareas de la unidad 1, 84 tareas de la unidad 2 y 120 tareas de la unidad 3, respectivamente. Estas, serán realizadas por diferentes equipos de estudiantes. ¿Cuál es el mayor número de equipos de estudiantes que se pueden formar de manera equitativa, asignando la misma cantidad de tareas a cada equipo y que no queden tareas sin asignar? _____

9. En una galaxia, existe un sol que emite tres diferentes rayos de manera intermitente: El rayo alfa cada 8 segundos, el rayo beta cada 10 segundos y el rayo gama cada 12 segundos. Si en este momento, el sol emite los tres rayos simultáneamente. ¿Cuántos segundos transcurren para que se emitan los tres rayos de nuevo al mismo tiempo?
- _____
10. A un carpintero, se le encomienda recortar una placa de madera de 1.20 metros de ancho y 2.10 metros de largo, en tablas cuadradas para venderlas como tablas de cocina para picar. Las tablas deben cortarse con el mayor tamaño posible sin desperdiciar madera. ¿Cuál es la medida de dichas tablas y cuántas se pueden obtener del corte? _____

Autoevaluación y coevaluación 5.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ___ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 5. Responde con honestidad, a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicé los conceptos de MCD y de mcm para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de mi entorno (M1-C1).			
Empleé la factorización de números para el cálculo del MCD y mcm (M3-C1).			
Aplicé los procedimientos para la factorización y el cálculo del MCD y el mcm para la solución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento (M3-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, concluida la progresión de aprendizaje 5, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicó los conceptos de MCD y de mcm para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de mi entorno (M1-C1).			
Empleó la factorización de números para el cálculo del MCD y el mcm (M3-C1).			
Aplicó los procedimientos para la factorización y el cálculo del MCD y el mcm para la solución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento (M3-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

El conjunto de los números reales

Progresión de aprendizaje 6

Revisa desde una perspectiva histórica, al conjunto de los números reales, comenzando con la consideración de números decimales positivos, hasta llegar a la presentación de la estructura de campo ordenado de los números reales.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A		
	C		
	H		
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A		
	C		
	H		

Evaluación diagnóstica 6.1

1. Selecciona la o las respuestas correctas a cada pregunta.

a) ¿Cuál es la suma de las siguientes fracciones $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$?

A) $\frac{5}{2}$

B) $\frac{10}{8}$

C) $\frac{21}{16}$

b) ¿Cuál de las siguientes fracciones es equivalente a 0.75?

A) $\frac{6}{8}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{9}{12}$

c) ¿Cuál es la suma de los siguientes números: $\sqrt{4} + 2^2$?

A) 4

B) 8

C) 6

d) ¿Cuál es valor que satisface a $x - 3 = 5$?

A) $x = 8$

B) $x = -8$

C) $x = \frac{5}{-3}$

2. Con la ayuda de la inteligencia artificial investiga.

a) El valor aproximado del número π . _____

b) Explica qué representa el número π . _____

c) El valor aproximado del número $\sqrt{2}$. _____

d) Explica qué representa el número $\sqrt{2}$. _____

Los números reales y sus propiedades

Con frecuencia hacemos uso de los diferentes tipos de números en las actividades diarias, cuando pagamos el transporte público, compramos alimentos, dividimos un pastel, representamos la altura de una persona, calculamos el descuento de un producto, etc.

Los primeros números que aprendemos a usar, son los números para contar o números naturales.

Los **números naturales**, son el primer ejemplo que conocemos de un conjunto infinito y lo representamos con la letra **N**.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

Los **números enteros**, están compuestos por el conjunto de números naturales, sus opuestos negativos y el cero. Este conjunto lo denotamos con la letra **Z**.

$$Z = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Los **números enteros negativos**, son aquellos números enteros que son menores que cero. Se representan $Z^- = \{-\infty, \dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, estos son los opuestos negativos de los números naturales y forman parte del conjunto de números enteros **Z**. Se utilizan para representar situaciones en las que se debe indicar una cantidad menor que cero, como pérdidas, deudas, descensos de temperatura, etc.

Los **números enteros positivos**, son aquellos números enteros que son mayores que cero. Se representan por $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, +\infty\}$, estos son los números naturales y forman parte del conjunto de números enteros **Z**, $N \subset Z$.

Los **números racionales**, son todos aquellos números representados por el cociente de dos números enteros, se escriben como fracciones, cuando necesitamos representar una cantidad que no es exacta o una cantidad de decimales cíclica o infinita. Este conjunto se denota con la letra **Q**.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in Z \text{ y } q \neq 0 \right\}$$

Todo número entero se puede representar como un cociente de dos enteros, usando la unidad como denominador, por lo tanto, todo número entero es un número racional, es decir $Z \subset Q$.

Todo número racional tiene una representación finita o infinita periódica, por ejemplo:

- Decimal finita: $\frac{5}{2} = 2.5$, $\frac{-1}{4} = -0.25$, $\frac{4}{5} = 0.8$, $\frac{9}{8} = 1.125$
- Decimal infinita periódica: $\frac{-1}{3} = -3.\bar{3}$, $\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$, $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$.

Ahora, veamos un conjunto de números diferente al de los números racionales. ¿Conoces a un número que no sea racional? Recordemos ese número que usamos en el cálculo del área y perímetro de un círculo. Estamos hablando del número π . Recordemos que el número π es el cociente del perímetro de una circunferencia entre su diámetro.

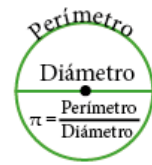


Figura 6.1. Relación entre perímetro y el diámetro.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Otro número muy popular y conocido es $\sqrt{2}$, el cual representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de una unidad de lado.

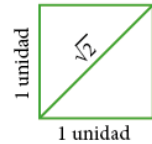


Figura 6.2. Longitud de la diagonal de un cuadrado de lado una unidad.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Estos números son considerados **números irracionales**, por no poder representarse como el cociente de dos enteros, y al escribirlos en forma decimal, resultan ser infinitos y no periódicos.

$$\pi = 3.1415926535 \dots , \sqrt{2} = 1.41421356 \dots$$

El conjunto de los números irracionales lo denotamos por Q' o I . El símbolo Q' , significa lo que no está en Q . Al unir los conjuntos de números racionales e irracionales, formamos un conjunto más extenso, que llamamos conjunto de los números reales y lo representamos con la letra R ($R = Q \cup I$).

El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales son disjuntos, $Q \cap I = \emptyset$ (no tiene ningún elemento en común). Además, $N \subset Z \subset Q \subset R$, y por otra parte $I \subset R$.

Te preguntarás ¿por qué se llaman números reales?, ¿existen números que no sean reales? Las respuestas a estas dos preguntas son similares, debido a que el nombre de reales permite separarlos de otros números, conocidos como números imaginarios compuestos por $\sqrt{-1}$.

Representación de los números reales en la recta numérica

La **recta numérica** real es un modelo geométrico, que utilizamos para representar el conjunto de números reales como puntos a lo largo de una línea horizontal, que se extiende infinitamente en direcciones opuestas.

A los números naturales, los asociamos con puntos situados a la derecha del cero, a los enteros negativos los asociamos con puntos situados a la izquierda del cero. Para ubicar de manera exacta un número racional no entero en la recta numérica, se divide el segmento en que se localiza en 10 partes iguales. Si el número racional tiene más

decimales, se realiza el proceso tantas veces como sea necesario hasta ubicarlo exactamente, pero aquí, solo lo ubicaremos de manera aproximada. Para ubicar los números irracionales se utiliza el mismo método que para ubicar a los racionales, el cual requiere de un proceso infinito de particiones.

Ejemplo formativo 6.1

Ubica en la recta numérica, Figura 6.3, los números que aparecen a continuación $\frac{5}{2}$, -4 , 5 , $\frac{-7}{3}$, π .

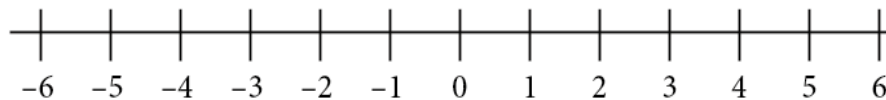


Figura 6.3. Segmento de recta numérica delimitada en doce unidades simétricas.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Respuesta:

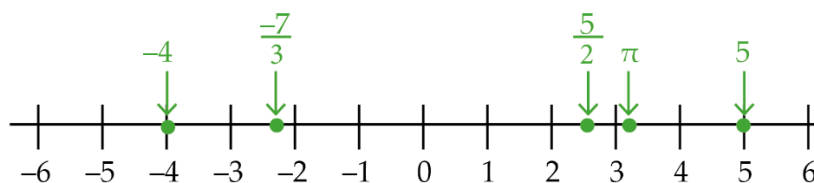


Figura 6.4. Ubicación de números reales en la recta numérica.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

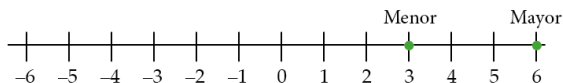
Propiedades de orden de los números reales

Hemos aprendido a ubicar los números reales en la recta numérica, y esto nos sirve para comparar dos números en el sentido de cómo es el primer número con respecto al segundo.

El símbolo $>$ lo empleamos para representar la expresión “**es mayor que**”. El símbolo $<$ lo utilizamos para representar la expresión “**es menor que**”. Y el símbolo $=$ lo usamos para representar la expresión “**es igual que**”.

Para comparar dos números, primero los ubicamos en la recta numérica y el número que esté a la derecha en la recta numérica es el mayor, el que esté a la izquierda es el menor y si coinciden en el mismo punto de la recta, los números son iguales.

Comparar el 6 con el 3

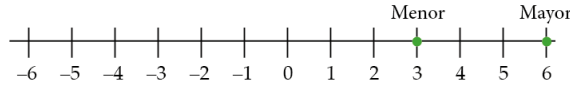


¿Cómo es el 6 con respecto al 3?

El 6 **es mayor que** 3.

Con el símbolo, $6 > 3$

Comparar el 3 con el 6

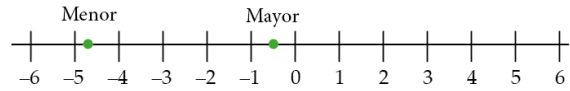


¿Cómo es el 3 con respecto al 6?

El 3 **es menor que** 6

Con el símbolo, $3 < 6$

Comparar el $-\frac{1}{2}$ con el $-\frac{14}{3}$



¿Cómo es el $-\frac{1}{2}$ con respecto al $-\frac{14}{3}$?

El $-\frac{1}{2}$ **es mayor que** $-\frac{14}{3}$

Con el símbolo, $-\frac{1}{2} > -\frac{14}{3}$

Figura 6.5. Ubicación de dos números reales en la recta numérica.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Utilizando este método, podemos afirmar que:

$$-2 < 1, 1 > -2, -4 > -6, 0 > -1, -1 < 0, 3 = 3, \frac{5}{2} > 1$$

Ley de tricotomía

Para comparar dos números reales cualesquiera a y b , solo una de las tres expresiones siguientes es verdadera:

$$a < b, a = b \text{ o } a > b$$

Propiedades de los números reales

Con los números reales, podemos realizar las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división (excepto la división por cero). De ellas, la suma y la multiplicación son las dos operaciones fundamentales, debido a que la resta y la división son operaciones inversas u opuestas de la suma y la multiplicación respectivamente.

Por ser el conjunto de los números reales ordenado, bajo las operaciones de suma y multiplicación, forman lo que llamamos el **campo de los números reales** y satisfacen las siguientes propiedades (Figura 6.6), donde a, b y c representan números reales.

<p>Conmutativa de la suma Notación: $a + b = b + a$ Significado: El orden al sumar números reales no afecta el resultado. Ejemplos: $7 + 5 = 5 + 7$ $(-5) + 7 = 7 + (-5)$</p>	<p>Conmutativa de la multiplicación Notación: $(a)(b) = (b)(a)$ Significado: El orden al multiplicar números reales no afecta el resultado. Ejemplos: $(4)(6) = (6)(4)$ $(-3)(2) = (2)(-3)$</p>	<p>Asociativa de la suma Notación: $(a + b) + c = a + (b + c)$ Significado: Se pueden hacer diferentes asociaciones al sumar y no se afecta el resultado. Ejemplos: $5 + (7 + 2) = (5 + 7) + 2$</p>
<p>Asociativa de la multiplicación Notación: $(a)(bc) = (ab)c$ Significado: Se pueden hacer diferentes asociaciones al multiplicar y no se afecta el resultado. Ejemplos: $5(2 * 3) = (5 * 2)3$</p>	<p>Neutro de la suma Notación: $a + 0 = a$ Significado: Todo número real sumado a 0 se queda igual; el cero es el idéntico aditivo. Ejemplos: $4 + 0 = 4$</p>	<p>Neutro de la multiplicación Notación: $(a)(1) = a$ Significado: Todo número real multiplicado por 1 se queda igual; el 1 es el idéntico multiplicativo. Ejemplos: $(\frac{15}{3})(1) = (\frac{15}{3})$</p>
<p>Distributiva Notación: $a(b + c) = ab + ac$ Significado: El factor lo distribuimos a cada sumando Ejemplos: $3(4 + 3) = (3)(4) + (3)(3)$</p>		

Figura 6.6. Propiedades de los números reales.

Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Ejemplo formativo 6.2

Identificar las propiedades de los números reales en operaciones básicas como:

$$3 + 4 = 7.$$

Podemos reescribir la identidad anterior, utilizando la propiedad conmutativa de la suma y sustituir el 7 de tal forma que podamos visualizarlo como dos números que se están sumando $3 + 4 = 4 + 3$. Observa que la igualdad no se altera.

Ejemplo formativo 6.3

Los estudiantes de tercer año de los grupos 3-1, 3-2 y 3-3, luego de haber realizado una excelente campaña de reciclaje durante todo el año y con la ayuda de sus familiares y profesores, recaudaron la cantidad de dinero necesario para realizar un viaje a Guadalajara. Si la ciudad de Guadalajara se encuentra a 690.40 kilómetros de Culiacán, y los autobuses que abordan los estudiantes de cada grupo parten a distintas horas y después de haber recorrido un cierto tramo se detienen en diferentes paraderos, como se indica en la Figura 6.7 responde:

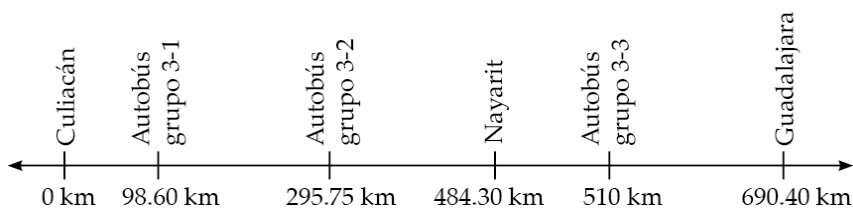


Figura 6.7. Representación gráfica de los diferentes paraderos de los camiones.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

1. El autobús del grupo 3-3, aventaja al del grupo 3-2, en 214.25 km. Si el chofer del 3-2, dice que llegará en su próxima parada a Nayarit, ¿cuántos kilómetros le faltan recorrer? 188.55 km

$$484.30 - 295.75 = 188.55$$

2. Si luego de un par de horas, el autobús del grupo 3-1 se ubica a mitad de camino, ¿cuántos kilómetros avanzó en ese tiempo, desde que se detuvo por primera vez? Avanzó 246.60 km.

$$690.40 \div 2 = 345.20$$
$$345.20 - 98.60 = 246.60$$

Los números racionales, como subconjunto de los números reales, los podemos utilizar para representar partes proporcionales de un mismo objeto (la fracción vista como una razón), como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

$\frac{360^\circ}{3}$ es la representación en forma de cociente de 120° .

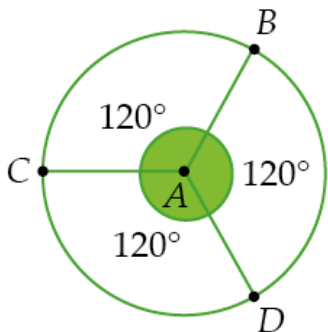


Figura 6.8. Representación circular de partes proporcionales en grados de un entero.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

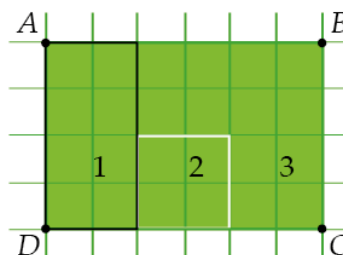


Figura 6.9. Representación rectangular de partes proporcionales de un entero por unidades de área.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

En el área 1, de $8 u^2$, lo que representamos es 8 de 24 cuadritos o bien $\frac{8}{24}$, que es la parte proporcional del rectángulo $ABCD$.

El área 2, $4 u^2$, 4 de 24 cuadritos o bien $\frac{4}{24}$ que es la parte proporcional del rectángulo $ABCD$.

Sumando las partes proporcionales

$$\frac{8}{24} + \frac{4}{24} + \frac{12}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

Ejemplo formativo 6.4

Un grupo de jóvenes se encontraban jugando a las canicas, tenían una regla para el que quisiera jugar y era, que cada jugador debía apostar 20 canicas. Participaron 3 jugadores: Juan, Pedro y Luis. Al finalizar el juego Juan se quedó con $\frac{1}{4}$ del total de canicas y Luis con $\frac{1}{3}$ del total, ¿con cuántas canicas se quedó Pedro?

Resolución: En total son 60 canicas (20 de cada uno). Observa que el numerador en cada fracción es 1, por lo tanto, podemos resumir la operación a dividir 60 entre 4 y 60 entre 3 con lo cual estaremos calculando lo que representa $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ del total de canicas. Puede expresarse así: $\frac{1}{4} = \frac{x}{60}$ y $\frac{1}{3} = \frac{x}{60}$, entonces $\frac{1}{4}$ equivale a 15 y $\frac{1}{3}$ a 20 canicas, lo cual indica que Pedro se está llevando 5 más de las que había apostado.

Respuesta: Pedro se queda con 25 canicas.

Los números irracionales se pueden visualizar en algunos ejercicios con figuras geométricas, como, por ejemplo, al calcular la diagonal de un cuadrado de área igual a uno o al calcular el área de un círculo πr^2 o el perímetro correspondiente a una circunferencia πD o $2\pi r$.



QR 6.1. Ubicación de números irracionales en la recta numérica.
Fuente: Parzibyte, 2024.

Ejemplo formativo 6.5

Calcula el área comprendida por una circunferencia si el radio es de 3 cm.

Resolución: sabemos que el área se calcula con la fórmula: $A = \pi r^2$; si sustituimos el valor del radio $A = \pi(3)^2$; elevamos el 3 al cuadrado; $A = \pi(9)$ y multiplicamos los valores queda como resultado $A \approx 28.2743 \text{ cm}^2$.

Respuesta: el área es de 28.2743 cm^2 aproximadamente.

Evaluación formativa 6.1

- Investiga en internet y elabora un diagrama de Venn que represente el orden de inclusión del conjunto y subconjuntos de todos los números reales.
- En los siguientes enunciados responde falso (F) o verdadero (V).
 - 0 es un número natural ()
 - -21 es un número natural ()
 - π no es un número racional ()
 - $\sqrt{2}$ es un número racional ()
 - $\sqrt{5}$ es un elemento de R ()
 - $\frac{1}{3}$ no pertenece Z ()
- Analiza e identifica cuál de las propiedades de los números reales se emplea en cada inciso.
 - $7 + 2 = 2 + 7$ _____
 - $6(3) = 3(6)$ _____
 - $8(2 + 3) = 8(2) + 8(3)$ _____
 - $\sqrt{7} + 0 = \sqrt{7}$ _____
 - $rst = r(st)$ _____
 - $3x(1) = 3x$ _____

4. A partir de las propiedades de los números reales, completa la expresión.
- Propiedad conmutativa para la multiplicación. $(-3)(-1 - 5) =$ _____
 - Propiedad distributiva. $2.3(5.2 + 3.3) =$ _____
 - Elemento inverso para la suma. $\pi + (-\pi) =$ _____
5. Jonathan afirma que $-5/3$ es un número racional y Gisela afirma que es un número real. ¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta. _____
-
6. La temperatura en La Rosilla, Durango es -7°C , mientras que en la sierra de Sonora es de -2°C . ¿En cuál lugar es mayor la temperatura? _____
7. Dos submarinos navegan en el mar, el primero a -12 m sobre el nivel del mar y el segundo a -30 m, ¿cuál de ellos se encuentra a menor profundidad? _____
8. En la carretera a Sanalona, un agricultor vende 10 litros de miel por \$750. ¿Cuál sería el costo por 6 litros de miel? _____
9. Calcula el radio de una circunferencia si se sabe que el área comprendida por la misma es de 40 cm^2 . _____
10. Si el sueldo de un repartidor de pizza a la semana es de \$1,852, ¿cuánto gana por día? _____
-
11. En Sinaloa, se cultivan una gran variedad de hortalizas bajo diferentes esquemas de producción, desde los muy tradicionales hasta los más avanzados en tecnología, entre los más comunes se encuentran los cultivos de chile, tomate, papa y elote. Un campesino, siembra en su hectárea las siguientes cantidades: $\frac{3}{10}$ de chile, $\frac{2}{20}$ de tomate, $\frac{5}{25}$ de papa, y el resto de elote. La Figura 6.6 representa una hectárea, colorea la cantidad de chile en verde, tomate en rojo, papa en café y elote en amarillo. ¿Qué cantidad del total representa el elote?

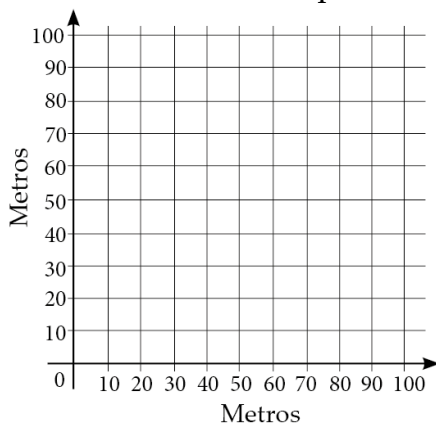


Figura 6.10. Representación gráfica de las medidas de una hectárea.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

12. Pedro salió a pasear el fin de semana con \$250. Si gastó $\frac{1}{5}$ de su dinero en comida, $\frac{3}{7}$ del resto en las entradas al cine y del dinero restante, la mitad para comprarse una prenda. ¿Cuánto dinero le quedó? _____

Autoevaluación y coevaluación 6.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ___ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
M3-C1 Resolví problemas utilizando las propiedades de los números reales.			
M1-C2 Comprendí que la estructura y propiedades del campo de los números reales facilita la solución de problemas matemáticos.			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, concluida la progresión de aprendizaje 6, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
M3-C1 Resolvió problemas utilizando las propiedades de los números reales.			
M1-C2 Comprendió que la estructura y propiedades del campo de los números reales facilita la solución de problemas matemáticos.			

Nombre y firma de quien coevalúa

Proporcionalidad directa e inversa

Progresión de aprendizaje 7

Resuelve situaciones-problema significativas para el estudiantado, que involucren el estudio de proporcionalidad tanto directa como inversa, así como también el estudio de porcentajes, empleando la estructura algebraica de los números reales.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 7.1

Como parte de la primera aproximación al objeto matemático de la proporcionalidad, analiza y atiende los planteamientos según corresponda.

1. Define el concepto de razón matemática y ejemplifica una situación en la que se emplea.
2. Explica o establece la diferencia entre una fracción y una razón matemática.
3. Establece una definición de proporción.
4. En una campaña de recaudación de fondos para una organización sin fines de lucro, se logró obtener la cantidad de \$50,000. La razón en cómo van a distribuirlo en dos de sus programas es de 3:2, ¿cómo sería asignada dicha cantidad?
5. Para preparar una jarra con dos litros de agua saborizada, se requiere de un sobre que contiene 14 g de concentrado en polvo, ¿cuántos gramos se necesitan para preparar ocho litros de agua saborizada?

En los planteamientos anteriores, pudiste observar y establecer ciertos razonamientos relacionados con la razón matemática y el pensamiento proporcional. De igual manera, resolviste situaciones que requieren un análisis y técnicas que hacen posible su solución mediante estrategias y estructuras algebraicas.

Como ya lo has visto, la proporcionalidad es un concepto que tiene numerosas aplicaciones en la vida cotidiana y en diversas disciplinas. Comprender la proporcionalidad directa e inversa es esencial para desarrollar el pensamiento algebraico y la resolución de problemas prácticos. La proporcionalidad describe la relación entre dos cantidades que varían de manera sistemática. Existen dos tipos principales: directa e inversa.

En una relación directamente proporcional, cuando una cantidad aumenta, la otra también aumenta en la misma proporción. Por ejemplo, si un auto viaja a velocidad constante, cuanto más tiempo viaje, mayor será la distancia recorrida.

1 hora -> 60 km
2 horas -> 120 km
3 horas -> 180 km

En una relación inversamente proporcional, cuando una cantidad aumenta, la otra disminuye en la misma proporción. Por ejemplo, si la distancia que recorre un auto es constante, cuanto mayor sea la velocidad, menor será el tiempo necesario para recorrerla.

40 km/h -> 3 horas para recorrer 120 km
60 km/h -> 2 horas para recorrer 120 km
120 km/h -> 1 hora para recorrer 120 km

A medida que sigas avanzando en tus estudios, descubrirás que la proporcionalidad es la base de muchos otros temas matemáticos más avanzados.

Razón y proporción

A partir de este punto, puedes entender que una razón es la comparación entre dos magnitudes. Tal es el caso, cuando la relación entre la base y la altura de un portarretratos, puede expresarse en la forma 20:30, lo que se entiende como que tiene 20 cm de base y 30 cm de altura, y se lee "20 es a 30". Esto significa que la base mide $\frac{2}{3}$ de la altura.

Una razón, es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$. Además, a y b son números reales que están expresados en las mismas unidades. En otras palabras, la razón es la comparación de dos cantidades mediante un cociente. Algunas veces, esta razón se escribe como $a:b$ y se lee " a es a b ".

Ahora vemos otro concepto, el de proporción. En el caso de la bandera nacional, debe estar a una razón 4 de ancho por 7 de largo. Esto significa que toda bandera con dimensiones a de ancho y b de largo, debe cumplir la siguiente proporción $\frac{a}{4} = \frac{b}{7}$.

Partiendo de que una proporción es la igualdad de dos razones, se dice entonces que, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales o están en proporción si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Con el análisis anterior, puedes observar y comprobar la propiedad fundamental de las proporciones, la cual satisface que **el producto de los extremos es igual al producto de los medios**.

En forma simbólica, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ viene a cumplir $a \cdot d = b \cdot c$, de este modo, conociendo tres términos cualesquiera de una proporción, es siempre posible calcular el cuarto término.

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también se escribe como $a:b :: b:c$ y se lee "a es a b como c es a d".

Proporcionalidad directa

La riqueza del concepto de proporcionalidad, permite mostrar que la matemática se articula en diversos contextos cuando se atiende su definición, y se usa conforme a sus fundamentos para enfrentar alguna situación. En ese sentido, se dará por entendido que una proporción, es una igualdad entre dos razones, las cuales están compuestas por magnitudes.

En consecuencia, el primer intento que haremos para abordar la solución de problemas y la modelación, será poniendo en práctica la lógica de una **proporcionalidad directa**, partiendo de la idea, de que una magnitud y , es directamente proporcional a la magnitud x , si la razón o el cociente entre ambas es constante, es decir, $\frac{y}{x} = k$, recibiendo k el nombre de constante de proporcionalidad, para lo cual es necesario se satisfaga que $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$. Dicho de otra forma, $y = k \cdot x$.

Ejemplo formativo 7.1

Fabiola, quiere aprender a preparar gelatinas cremosas de limón a partir de una receta, que su mamá le entregó con los ingredientes necesarios para cuatro personas, sin embargo, ella tiene la intención de hacer una tabla de esta receta para un número diferente de personas.

Paso 1. Comprender el problema

GELATINA DE LIMÓN CREMOSA	
Ingredientes:	
•	10 limones.
•	1 lata de leche condensada, 395 g.
•	2 tazas de yogurt natural.
•	1/2 taza de agua.
•	4 sobres de grenetina, 7 g.
Opcional: ralladura de limón.	

Figura 7.1. Proporciones de la receta.

Fuente: Elaboración propia (Canva, 2023).

Paso 2. Concebir un plan

Para lo anterior, es necesario ajustar la receta y calcular las cantidades de ingredientes que se ocupan para un número específico de personas. Por ello, es importante observar y completar la siguiente tabla:

Ingredientes	Número de personas						
	4	8	12	16	20	24	28
Limones	10						
Lata de leche condensada	1						
Tazas de yogurt	2						
Tazas de agua	1/2						
Sobre de grenetina	4						

Paso 3. Ejecutar el plan

Determina las porciones de ingredientes para 8, 12 y 16 personas; posteriormente, de manera independiente, puedes concluir la tabla con las porciones faltantes.

Si y representa la cantidad del ingrediente, y x es el número de personas, establecemos que $y = k \cdot x$, de donde $k = \frac{y}{x}$.

	Para 8 personas	Para 12 personas	Para 16 personas
Limones: $k = 2.5$	$2.5 \cdot 8 = 20$	$2.5 \cdot 12 = 30$	$2.5 \cdot 16 = 40$
Leche condensada: $k = 0.25$	$0.25 \cdot 8 = 2$	$0.25 \cdot 12 = 3$	$0.25 \cdot 16 = 4$
Tazas de yogurt: $k = 0.5$	$0.5 \cdot 8 = 4$	$0.5 \cdot 12 = 6$	$0.5 \cdot 16 = 8$
Tazas de agua: $k = 0.125$	$0.125 \cdot 8 = 1$	$0.125 \cdot 12 = 1.5$	$0.125 \cdot 16 = 2$
Sobre de grenetina: $k = 1$	$1 \cdot 8 = 8$	$1 \cdot 12 = 12$	$1 \cdot 16 = 16$

Para obtener los datos de la tabla, multiplica el número de personas (x) por la constante de proporcionalidad (k) y obtendrás la porción de cada ingrediente.

Paso 4. Visión retrospectiva

Si y representa la cantidad del ingrediente, y x es el número de personas, se debe satisfacer que $k = \frac{y}{x}$.

$$\frac{20}{8} = \frac{30}{12} = \frac{40}{16} = 2.5$$

$$\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = 0.25$$

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = 0.5$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1.5}{12} = \frac{2}{16} = 0.125$$

Por lo tanto, la cantidad de ingredientes y , es correcta para el número de personas x indicadas en la tabla anterior.

Proporcionalidad inversa

En una *proporcionalidad inversa*, se da una relación en la que se establece que si y aumenta, x debería disminuir, o viceversa, esto implica que $y_1 \cdot x_1 = k = y_2 \cdot x_2$, haciendo posible calcular la variable $y = \frac{k}{x}$, así como la variable $x = \frac{k}{y}$.

Ejemplo formativo 7.2

Relaciona la información necesaria, para conjeturar sobre la situación y establecer la solución.

Considera que, si tres pintores tardan 12 días en pintar cierta área de un fraccionamiento, ¿cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo nueve pintores bajo iguales condiciones?

Una manera de dar solución al planteamiento es la siguiente relación:

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{9}$$

$$x = \frac{(3)(12)}{(9)}$$

$$x = 4$$

Por lo tanto, nueve pintores hacen el trabajo en 4 días.

De igual manera, otra forma de encontrar el resultado sería considerando la siguiente tabla. Las magnitudes correspondientes a pintores y días, tienen una relación inversamente proporcional. Por lo que, se puede interpretar que, al aumentar el número

de pintores, los días para concluir la obra disminuirán. Por su parte, para obtener una posible solución, debes multiplicar estas dos magnitudes y cuidar que el producto sea constante, de tal manera que:

Pintores	Días	Unidades
3	12	36
6	6	36
9	4	36

Así mismo, es posible establecer un procedimiento con la constante de proporcionalidad:

$$3 \cdot 12 = 36 = 9 \cdot x$$

$$x = \frac{36}{9} = 4$$

Por lo tanto, nueve pintores hacen el trabajo en 4 días.

Porcentajes

El porcentaje de una magnitud, es una relación de proporcionalidad entre una cantidad y un conjunto de unidad, expresado por cada 100 de ellos, además, permite expresar y comparar las partes de un todo, mediante razones y proporciones. Este se usa para calcular descuentos, intereses, impuestos, propinas, comisiones, frecuencias, partes, etc.

$$\text{El porcentaje es igual a } \frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \times 100\%$$

Cabe mencionar, que en estas situaciones, los conceptos de razón y porcentaje se encuentran estrechamente relacionados, porque ambos son utilizados para representar una cantidad como fracción de un entero o en cien partes iguales.

Ejemplo formativo 7.3

Procesa la información para realizar las conjeturas necesarias y dar solución:

Un huerto piloto, que se instaló en la Unidad Académica Preparatoria Escuinapa, ocupa una extensión de 350 m² y es dividido en tres parcelas para cultivos (que se consumen en la comunidad) como son pepino, cebolla y tomate. El esquema de disposición del campo será de la siguiente manera: 105 m² para pepino, 112 m² para cebolla y 133 m² para tomate. ¿Qué porcentaje del terreno le corresponde a cada cultivo?

Resolución:

$$\text{Porcentaje (pepino): } \frac{105}{350} \times 100\% = 30\%$$

$$\text{Porcentaje (cebolla)}: \frac{112}{350} \times 100\% = 32\%$$

$$\text{Porcentaje (tomate)}: \frac{133}{350} \times 100\% = 38\%$$

Para el pepino se destinará el 38% del huerto, para la cebolla un 32% y para el tomate un 38%.

Evaluación formativa 7.1

Pon en práctica el conjunto de conocimientos y experiencias adquiridas aplicando las diversas estrategias de solución y ejecutando procedimientos:

1. Un medicamento debe administrarse en dosis de 0.075 g por cada 1 500 g de peso corporal. ¿Cuál es la dosis para una persona que pesa aproximadamente 52 kg?
2. Con base al ejemplo formativo 7.1, ¿qué cantidad de cada ingrediente se necesita para hacer una gelatina cremosa de limón con una proporción para 10 personas?
3. La obra literaria “Cien años de soledad” de Gabriel García Márquez, de acuerdo a su ficha bibliográfica, edición conmemorativa, está compuesta por 752 páginas. Por lo tanto, si una persona promedio puede leer alrededor de 40 páginas por hora, ¿en cuántas horas logrará concluir la lectura referente a esta novela?
4. Los datos del desplazamiento de un automóvil en función del tiempo, se muestran en la siguiente tabla:

Datos del desplazamiento del automóvil						
Tiempo (t)	1	2	4	5	7	10
Desplazamiento (d)			480			

- a) Establece una expresión para dicha relación.
 - b) Completa la tabla.
 - c) Grafica los datos del desplazamiento en función del tiempo.
5. El encargado de una obra, ha determinado que tres pintores, tardan en hacer un trabajo en 12 días, si dicho trabajo se requiere entregar en ocho días, ¿cuántos trabajadores se necesitan contratar?

6. En un instrumento de cuerda, la longitud (L) de una cuerda varía inversamente proporcional con la frecuencia (f) de sus vibraciones. Una cuerda de guitarra de longitud de 65 cm, vibra estacionariamente en su modo fundamental, a una frecuencia de 440 Hz (Hertz). Encuentra la constante de proporcionalidad y la frecuencia de una cuerda de 69 cm.
7. Un arquitecto, está interesado en comprar dos terrenos en forma rectangular con una superficie de 200 m^2 cada uno. Para hacer una distribución adecuada de la construcción, ha considerado que los terrenos tengan 10 m y 8 m de ancho, ¿qué medidas deben tener de largo?
8. La masa de la moneda de \$10.00 es de 10.329 gramos. Si se conoce que la aleación dorada es de 5.579 g, ¿qué porcentaje de esa masa le corresponde a su aleación dorada y su aleación plateada?
9. En el diplomado de pensamiento matemático, la ponderación de un examen de 25 preguntas es equivalente al 20%, ¿qué porcentaje obtuvo una alumna que obtuvo 16 aciertos?
10. El tamaño de una fotografía es de $20 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$, en una relación de base por altura. La intención es hacer una modificación proporcional de su tamaño, para ello la indicación es disminuir a 13 cm su base. Determina las nuevas medidas de la fotografía.
11. Al consultar la ficha técnica de un saco de “Cemento MeXcla Big Bag”, se observa que para lograr un concreto con una $f'c$ (resistencia del concreto) de 200 kg/cm^2 , se requiere un bote de 19 L como medida para agregar las siguientes proporciones a la mezcla:

Resistencia	Aplicación	Cemento Bote 19 L	Arena Bote 19 L	Grava Bote 19 L	Agua Bote 19 L	Volumen en L
$f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$	Zapata	4	4	6	2	145

Tabla 7.1. Cantidad de material para concreto hidráulico.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Por la práctica, se sabe que, para obtener una mezcla con un volumen de 1000 L, se ocupan 28 botes de cemento.

- a) ¿Cuál es la proporción de cada material, que se necesita para hacer dicha mezcla?

- b) Si se desea construir una zapata de $60\text{ cm} \times 60\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, ¿qué volumen de material se ocupa si se sabe que 1000 L equivale a 1 m^3 ?

12. Un arquitecto, está interesado en comprar un terreno rectangular con una superficie que relaciona el ancho y el largo con las medidas de $5\text{ m} \times 40\text{ m}$, sin embargo, está considerando que, para tener una mejor distribución de la construcción, es necesario tener la misma superficie pero que el ancho mida 8 m, por lo tanto, ¿qué medida debe tener el largo del terreno para que cumpla con la optimización de los espacios?

13. La concentración de un suero glucosado al 5%, indica que en 100 ml de concentración hay cinco gramos de glucosa, por lo que si a un paciente se le administran 1000 ml/día de este suero, y conociendo que un gramo es igual a 1000 miligramos, ¿cuántos miligramos de glucosa recibe al día?



Autoevaluación y coevaluación 7.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 7. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Explicué el proceso de resolución de un problema real usando proporciones o porcentajes. (M3-C2).			
Presenté soluciones viables a problemas reales que se resuelven mediante proporciones o porcentajes (M4-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 7, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			

Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Explicó el proceso de resolución de un problema real usando proporciones o porcentajes. (M3-C2).			
Presentó soluciones viables a problemas reales que se resuelven mediante proporciones o porcentajes (M4-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Elementos de matemática financiera

Progresión de aprendizaje 8

Discute la conformación de un proyecto de vida, considerando elementos básicos de la matemática financiera, tales como interés simple y compuesto, ahorros y deudas, a través de la aplicación de la estructura algebraica de los números reales. Con la finalidad de promover la toma de decisiones más razonadas.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema, tanto teórico como de su entorno.	A		
	C		
	H		
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos, empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A		
	C		
	H		
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A		
	C		
	H		

Evaluación diagnóstica 8.1

Selecciona la respuesta correcta:

1. ¿Cómo se define el capital en el contexto de la matemática financiera?
 - a) La cantidad de dinero depositada o prestada, sobre la cual se calcula el interés.
 - b) El total de intereses ganados o pagados en un período de tiempo.
 - c) El valor final de una inversión después de un período de tiempo.
 - d) La tasa de interés aplicada a una inversión o préstamo.

2. ¿Qué es el interés en el contexto financiero?
 - a) El dinero que se recibe por mantener un saldo positivo en una cuenta bancaria.

- b) El porcentaje del capital prestado, que un prestamista cobra a un prestatario por el uso del dinero.
- c) La cantidad total de dinero pagada al final de un préstamo.
- d) El dinero que se debe pagar por utilizar un servicio bancario.
3. ¿Qué se entiende por amortización en el contexto de préstamos financieros?
- a) El proceso de reducir el saldo de un préstamo, mediante pagos regulares que cubren tanto el principal como el interés.
- b) El aumento del saldo de un préstamo, debido a intereses no pagados.
- c) El pago único realizado al final del período del préstamo.
- d) El cálculo del interés compuesto sobre un préstamo.
4. ¿Qué es la capitalización en matemáticas financieras?
- a) El proceso de calcular los intereses sobre el capital inicial únicamente.
- b) La frecuencia con la que se añaden los intereses ganados al capital principal, permitiendo que los intereses generen a su vez más intereses.
- c) El monto total pagado en un préstamo al final de su término.
- d) El cálculo del valor presente de una inversión futura.
5. ¿Cuál es el resultado de $(3x - 2)^t$, si $x = 4$ y $t = 2$?
- a) 64 b) 100 c) 144 d) 196
6. María compró un vestido que originalmente costaba \$1,200.00, pero estaba en oferta con un descuento del 25 %. Además, tuvo que pagar un impuesto del 8 % sobre el precio con descuento. ¿Cuál fue el precio final que pagó María por el vestido?
- a) \$936.00 b) \$972.00 c) \$1,026.00 d) \$1,152.00

Raúl y Elizabeth son un matrimonio joven que ha logrado ahorrar \$1,000,000.00 a través de su arduo trabajo y disciplina financiera. Ambos, están interesados en invertir este capital para asegurar su futuro y obtener un rendimiento adicional. Después de investigar varias opciones, deciden acudir al Banco InvertAhorro, conocido por ofrecer atractivas tasas de interés y planes de inversión flexibles.

Durante su reunión con el asesor financiero del banco, este les ofrece dos opciones:

- Opción A: inversión con Interés Simple.
 - Tasa de interés: 6% anual.
 - Duración: 5 años.
- Opción B: inversión con Interés Compuesto.
 - Tasa de interés: 5% anual capitalizable cada semestre.
 - Duración: 5 años.

Raúl y Elizabeth intercambian sus ideas sobre cómo invertir el dinero. Elizabeth sugiere la opción A; su razonamiento es que al final de cada año, podrán retirar los intereses generados y utilizarlos para cubrir algunos gastos planificados, como unas vacaciones familiares o la remodelación de su hogar.

Por otro lado, Raúl propone un enfoque diferente. Él cree que es mejor optar por la opción B, con la diferencia de que los intereses generados semestralmente se reinviertan o capitalicen. De esta manera, argumenta Raúl, el capital inicial crecerá aún más, ya que generará intereses sobre los intereses acumulados de cada semestre.

Ante estas dos propuestas, Raúl y Elizabeth se encuentran indecisos sobre qué plan de inversión les conviene más para obtener el mayor rendimiento posible de su capital. ¿Cuál de las dos propuestas de inversión a largo plazo les ofrece un mayor rendimiento a Raúl y Elizabeth?

Interés simple

Pensando en tu futuro, quizás estés considerando ir a la universidad, comenzar un negocio o ahorrar para comprar tu primer auto. En este momento, es importante entender cómo funciona el dinero y cómo puede trabajar para ti. Aquí es donde entra en juego el interés simple.

El interés simple, es un concepto financiero básico que se aplica en muchas situaciones de la vida real. Desde solicitar un préstamo para pagar tu matrícula universitaria, hasta abrir una cuenta de ahorros en el banco, por lo que este está presente en muchas transacciones financieras cotidianas.

¿Cómo funciona el interés simple? Imagina que tu mejor amigo te pide prestados \$1,000.00 para ir a un concierto, y promete pagarte en un mes con un interés del 5%. Esto significa que al final del mes, te devolverá los \$1,000.00 más \$50.00 de intereses. Este es un ejemplo de cómo funciona el interés simple: se calcula únicamente sobre el capital inicial prestado.

Ahora, piensa en ti mismo. Tal vez estés ahorrando para comprar un auto usado. Si depositas \$5,000.00 en una cuenta de ahorros que ofrece un interés simple anual del 2%, al cabo de un año, tendrás \$5,100.00. Ese dinero extra que ganaste, puede ayudarte a alcanzar tu meta de comprar el auto más rápido.

El interés simple se refiere, al cálculo del interés únicamente sobre el monto inicial prestado o invertido, y no sobre los intereses generados en períodos anteriores. Esto, lo convierte en un método sencillo y directo para determinar el costo o ganancia de una operación financiera. Este, se calcula sobre el capital inicial y no sobre los intereses generados en períodos anteriores. La fórmula para calcularlo es:

$$I = C \cdot i \cdot t$$

Donde:

I : Interés generado; C : Capital inicial; i : Tasa de interés y t : Tiempo.

Retomando el caso de Elizabeth, que eligió la opción A: inversión con interés simple con una tasa de interés del 6% anual a cinco años. En el primer año el interés obtenido es: $I = (1000000)(0.06) = 60,000$

Por lo tanto, el interés total por un año sería de \$60,000.00. Tomando en cuenta la inflación, que por lo regular el dinero se deprecia cada año, alcanzándole menos su dinero para los gastos requeridos y, en consecuencia, para sus vacaciones. Al final de 5 años el interés total obtenido sería de \$300,000.00

Ejemplo formativo 8.1

1. Tu generación de bachillerato está organizando una fiesta de graduación y necesita recaudar \$100,000.00, el comité de la fiesta decide pedir un préstamo a un padre de familia que ofrece un interés simple del 3% anual. Si planean pagar el préstamo en 6 meses, ¿cuánto tendrán que devolver en total?

Resolución:

Para calcular el interés simple, usamos la fórmula: $I = C \cdot i \cdot t$.

En este caso:

$$C = \$10,000.00$$

$$i = 3\% \text{ es equivalente a } i = 0.03$$

$$t = 6/12 = 0.5 \text{ años (ya que 6 meses es medio año)}$$

Entonces, el interés será: $I = 100000 \times 0.03 \times 0.5 = 1500$

El comité tendrá que devolver el capital principal de \$100,000.00 más un interés de \$1,500.00; es decir, un total de \$101,500.00

2. Pedro invierte \$10,000.00 a una tasa de interés simple del 5% anual durante 3 años, ¿cuánto interés ganará Pedro después de 3 años?

Resolución:

Usando la fórmula para calcular el interés simple: $I = C \cdot i \cdot t$.

$$I = (10000)(0.05)(3) = 1500$$

Por lo tanto, Pedro ganará \$1,500.00 de interés después de 3 años.

3. Quieres ahorrar \$20,000.00 para un viaje de verano con tus amigos. Tienes \$10,500.00 ahorrados y decides invertirlos en un certificado de depósito (CD) a 9 meses con una tasa de interés simple anual del 2.5%. ¿Cuánto dinero te faltará después de los 9 meses, para completar la cantidad final que necesitas?

Resolución:

Usando la fórmula para calcular el interés simple: $I = C \cdot i \cdot t$.

$$C = \$20,000.00; i = 2.5\% \text{ es equivalente a } i = 0.025; t = 9/12 = 0.75 \text{ años}$$

Entonces, el interés será: $I = 10500 \times 0.025 \times 0.75 = 196.88$.

Al final de los 9 meses, tendrás \$10,696.88. Es decir, te faltará un total de \$9,303.12.

Interés compuesto

¿Alguna vez has pensado en cómo tu dinero puede crecer con el tiempo? Si tienes una alcancía donde guardas tus ahorros y cada mes tu papá, para estimularte a seguir ahorrando, te da un 5% del total que hay en la alcancía para que también lo ahorres, y esto se repite durante un año. Sorprendentemente, tu alcancía parece llenarse más rápido de lo que esperabas. El dinero adicional que recibes por ese extra que te da tu papá, se le conoce como interés compuesto. Es decir, que te paguen intereses de los intereses.

El interés compuesto es un concepto financiero, que tiene el potencial de hacer crecer tu dinero de manera exponencial a lo largo del tiempo. A diferencia del interés simple, donde solo ganas intereses sobre tu capital inicial, el interés compuesto te permite ganar intereses sobre tus intereses previos. Es como si tu dinero estuviera trabajando para ti, generando más dinero mientras tú sigues con tu vida.

Imagina que tienes \$1,000.00 en una cuenta que te ofrece un 5% de interés anual compuesto. Después del primer año, tendrás \$1,050.00. Pero la magia ocurre en los años siguientes: en el segundo año, ganarás intereses no solo sobre los \$1,000.00 iniciales, sino también sobre los \$50.00 que ganaste en el primer año. Esto significa que, para el segundo año, tu balance crecerá a \$1,102.50. A medida que pasan los años, este efecto se multiplica, permitiendo que tu dinero crezca a un ritmo cada vez mayor.

El interés compuesto, es una opción que puede ayudarte a alcanzar tus metas financieras a largo plazo, como ahorrar para la universidad, comprar una casa o planificar tu jubilación. Cuanto antes empieces a invertir y aprovecharlo, más tiempo tendrá tu dinero para crecer.

El interés compuesto se calcula sobre el capital inicial y los intereses generados en periodos anteriores. La fórmula para calcular el monto final con interés compuesto es:

$$M = C(1 + i)^t$$

Donde:

M : Monto final; C : Capital inicial; i : Tasa de interés y t : Tiempo.

Ejemplo formativo 8.2

1. Luis decide invertir \$8,000.00 en un plan de ahorro que ofrece un interés compuesto del 6% anual. ¿Cuánto dinero tendrá acumulado después de 10 años si no realiza más depósitos?

Resolución:

Datos:

$C = \$8,000.00$; $i = 0.06$; $t = 10$ años; M : incógnita

Fórmula del interés compuesto: $M = C(1 + i)^t$

Sustituyendo los valores: $M = 8000(1 + 0.06)^{10} = 8000(1.06)^{10} = 14,327.38$.

Después de 10 años, Luis tendrá acumulado \$14,327.38 en su plan de ahorro.

2. Luis pide un préstamo de \$19,000.00 con una tasa de interés compuesto del 0.7% anual. Si decide pagar el préstamo en 2 años, ¿cuánto pagará al final del período?

Resolución:

Datos:

$C = \$19,000.00$; $i = 0.07$; $t = 2$ años; M : incógnita

Fórmula del interés compuesto: $M = C(1 + i)^t$

Sustituyendo los valores: $M = 19000(1 + 0.07)^2 = 19000(1.07)^2 = 21,753.10$.

Por lo tanto, Luis pagará \$21,753.10 al final del período de 2 años.

3. Una empresa desea comprar una máquina que cuesta \$50,000.00, si la empresa decide ahorrar \$10,000.00 al final de cada año y puede obtener un interés compuesto del 8 % anual, ¿en cuántos años podrá comprar la máquina? Sugerencia: $M = \frac{C[(1 + i)^t - 1]}{i}$.

Resolución:

Datos:

Costo de la máquina: \$50,000.00

Depósito anual: \$10,000.00

Tasa de interés anual: 8% equivalente a 0.08

Tiempo: incógnita.

Fórmula:

$$M = \frac{C[(1 + i)^t - 1]}{i}$$

Sustituyendo los valores:

$$50000 = \frac{10000[(1 + 0.08)^t - 1]}{0.08}$$

Resolviendo para t :

$$(0.08)(50000) = 10000[(1 + 0.08)^t - 1]$$

$$4000 = 10000[(1.08)^t - 1]$$

$$4000 = 10000(1.08)^t - 10,000$$

$$10000 + 4000 = 10000(1.08)^t$$

$$14000 = 10000(1.08)^t$$

$$\frac{14000}{10000} = (1.08)^t$$

$$1.4 = (1.08)^t$$

$$\log 1.4 = \log(1.08)^t$$

Usando la propiedad de
logaritmos: $\log a^b = b \cdot \log a$

$$\text{Log } 1.4 = t \cdot \log 1.08$$

$$\frac{\log 1.4}{\log 1.08} = t$$

$$4.37 \approx t$$

La empresa podrá comprar la máquina después de 4 años.

Ahora, retomamos la situación del inicio, en el caso de la opción B elegida por Raúl: una inversión con interés compuesto a una tasa de interés del 5% capitalizable semestralmente por 5 años.

Al capitalizarse cada seis meses, la fórmula del interés compuesto $M = C(1 + i)^t$, se transforma en:

$$M = C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

donde:

M = monto final acumulado.

C = inversión inicial o principal.

i = tasa de interés anual (expresada como decimal).

n = número de veces que se capitaliza el interés en un año.

t = tiempo en años

Luego:

$$M = 1000000 \left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2 \cdot 5} = 1\,280\,084.54$$

Por lo que Raúl y Elizabeth recibirán \$1,280,084.54; es decir, \$280,084.54 de interés. En consecuencia, a pesar de que el dinero se deprecie por factores como la inflación, les conviene más la opción A. Y al final de 5 años el interés total obtenido sería de \$300,000.00.

Siendo el interés compuesto una mejor opción de inversión, ¿por qué en este caso resulta mejor la opción elegida por Elizabeth?

Inflación y ganancia anual total (GAT)

Cuando empiezas a trabajar, una de las primeras cosas que te propones comprar es un automóvil. Para ello ahorras \$3,000.00 mensuales y decides invertir este dinero en una cuenta de ahorros que te ofrece una tasa de interés anual del 3%. Te sientes emocionado porque en un año tendrás los \$36,500.00 que cuesta el automóvil. Sin embargo, hay un factor importante que debes tener en cuenta: la inflación.

La inflación es el aumento general y sostenido de los precios de los bienes y servicios en una economía a lo largo del tiempo. En otras palabras, con la inflación, el

poder adquisitivo de tu dinero disminuye. Por ejemplo, si el año pasado podías comprar una pizza por \$100.00, pero este año, debido a la inflación, la misma pizza cuesta \$108.00, aunque tengas más dinero en tu cuenta de ahorros, es posible que no puedas comprar tantas cosas como antes.

Aquí es donde entra en juego la Ganancia Anual Total (GAT) real, que se interpreta como la ganancia o pérdida de valor de nuestro dinero. La GAT real, es una medida que tiene en cuenta no solo la tasa de interés que ganas en tus inversiones, sino también el impacto de la inflación. Es una herramienta útil para evaluar el rendimiento real de tus inversiones, y determinar si estás ganando o perdiendo poder adquisitivo.

Volviendo al ejemplo de tu cuenta de ahorros con un interés anual del 3%, supongamos que la tasa de inflación anual es del 2%. Aunque tu saldo de cuenta muestre \$36,500.00 después de un año, en realidad, solo habrás ganado un 1% en términos de poder adquisitivo.

La GAT real se calcula mediante la fórmula:

$$GAT\ real = \frac{i - f}{1 + f} \times 100\%,$$

donde i es la tasa de interés y f la tasa de inflación.

Ejemplo formativo 8.3

La empresa "Inversión Segura" ofrece a sus clientes un fondo de inversión con una tasa de interés anual del 7%. Si la tasa de inflación anual es del 4%, calcula la Ganancia Anual Total real que obtendrían los clientes de "Inversión Segura".

Resolución:

Datos:

$i = 0.07$ equivalente al 7%.

$f = 0.04$ equivalente al 4%.

La fórmula para calcular el GAT real es: $GAT\ real = \left(\frac{i-f}{1+f}\right) \cdot 100\%$

Sustituyendo valores:

$$GATreal = \left(\frac{0.07 - 0.04}{1 + 0.04}\right) \cdot 100\%$$

$$GATreal = \left(\frac{0.03}{1.04}\right) \cdot 100\%$$

$$GATreal = 2.88\%$$

Por lo tanto, los clientes de "Inversión Segura" obtendrían una Ganancia Anual Total real del 2.88%. Esto significa que, ajustando por la inflación, su inversión crecería en un 2.88% en términos reales cada año.

Deudas y manejo financiero responsable

En la vida, es común enfrentarse a situaciones en las que se requiere cierta cantidad de dinero para cubrir gastos importantes, como comprar una casa, un automóvil, pagar la educación universitaria o incluso cubrir emergencias médicas. Sin embargo, no siempre se cuenta con los recursos necesarios en el momento preciso. En estos casos, una opción viable es adquirir una deuda, ya sea a través de un préstamo bancario, una tarjeta de crédito o algún otro medio de financiamiento.

Las deudas, pueden ser una herramienta útil si se manejan de manera responsable, pero también, pueden convertirse en una carga financiera abrumadora si no se tiene cuidado. Por lo que es importante comprender los conceptos básicos del endeudamiento y el manejo financiero para evitar problemas a futuro.

Por ejemplo, si estás planeando ir a la universidad y necesitas financiar tus estudios. Solicitas un préstamo estudiantil, con una tasa de interés del 6% anual. Al principio, la deuda puede parecer manejable, pero a medida que pasan los años y los intereses se acumulan, el monto total a pagar puede aumentar significativamente. Es importante tener en cuenta que los intereses se calculan sobre el saldo pendiente, lo que significa que mientras más tiempo tarde en pagar la deuda, más intereses deberás pagar.

Otro escenario común, es el uso de tarjetas de crédito. Estas pueden ser muy útiles para hacer compras y pagar servicios, pero también pueden ser una trampa si no se utilizan con precaución. Si no pagas el saldo completo cada mes, los intereses se acumulan rápidamente, y una pequeña deuda puede crecer exponencialmente en poco tiempo.

Para evitar caer en un ciclo de deudas insostenibles, se debe establecer un presupuesto realista y priorizar los gastos esenciales sobre los no esenciales. Además, es recomendable pagar más del mínimo requerido en las deudas, ya que esto reducirá los intereses a largo plazo y acelerará el proceso de pago.

El nivel de endeudamiento se calcula mediante la fórmula:

$$\text{Nivel de endeudamiento: } \frac{\text{Deuda mensual}}{\text{Ingreso mensual}} \times 100\%$$

Ejemplo formativo 8.4.

María tiene un salario mensual de \$16,000.00 y las siguientes deudas:

- Hipoteca: \$450,000.00 con una tasa de interés anual del 5%, pagadera en 20 años.
- Tarjeta de crédito: \$15,000.00 con una tasa de interés anual del 22%.

Si María paga \$3,000.00 al mes por su hipoteca y \$500.00 al mes por su tarjeta de crédito, ¿cuál es su nivel de endeudamiento?, ¿es un nivel manejable o preocupante?

Resolución:

Datos:

Salario mensual de María: \$16,000.00

Deuda de hipoteca: \$450,000.00 con una tasa de interés anual del 5%.

Pago mensual de hipoteca: \$3,000.00

Deuda de tarjeta de crédito: \$15,000.00 con una tasa de interés anual del 22%.

Pago mensual de tarjeta de crédito: \$500.00

Cálculo del nivel de endeudamiento:

Pago mensual total de deudas = Pago mensual de hipoteca + Pago mensual de tarjeta de crédito

Pago mensual total de deudas = \$3,000.00 + \$500.00 = \$3,500.00

Nivel de endeudamiento = (Pago mensual total de deudas / Ingreso mensual) × 100%.

Nivel de endeudamiento = ($\$3500.00 / \16000.00) × 100%.

Nivel de endeudamiento = 21.875%.

Evaluación del nivel de endeudamiento:

Generalmente, se considera que un nivel de endeudamiento por debajo del 30% es manejable y poco riesgoso. En este caso, el nivel de endeudamiento de María es del 21.875 %, lo cual se considera un nivel manejable.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que María tiene una deuda de tarjeta de crédito considerable (\$15,000.00) con una tasa de interés muy alta (22% anual). Esto, podría convertirse en un problema si no logra pagar esa deuda rápidamente, ya que los intereses crecerán exponencialmente.

Evaluación formativa 8.1

1. Juan, tiene un negocio de venta de artículos de oficina y desea invertir parte de sus ganancias en un plan de ahorro a largo plazo. Él está considerando dos opciones de inversión:

Opción A: invertir \$50,000.00 en una cuenta de ahorros, que ofrece una tasa de interés anual del 5% capitalizable mensualmente.

Opción B: invertir \$50,000.00 en un fondo de inversión, que ofrece una tasa de interés anual del 6% capitalizable trimestralmente.

Construye un modelo matemático para comparar ambas opciones, y determinar cuál le proporcionará un mayor monto de dinero después de 10 años.

2. Karen, invirtió \$10,000.00 en un fondo de ahorro, que generó un rendimiento anual del 8% durante un período de 3 años. Los precios de los bienes y servicios al inicio de su inversión y al final del período de 3 años, se muestran a continuación:
- Año 1: precio de una canasta de bienes y servicios es igual a \$100.00.
 - Año 3: precio de la misma canasta de bienes y servicios es igual a \$112.00.

Calcula la tasa de inflación promedio $\left[\left(\frac{\text{Precio_final}}{\text{Precio_inicial}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \times 100\%$ (donde n es el número de años) y la Ganancia Anual Total real de la inversión de Karen.

3. Pedro y María, tienen un ingreso mensual combinado de \$25,000.00 y sus deudas son las siguientes:

Hipoteca: \$450,000.00 con una tasa de interés anual del 4%, pagadera en 20 años.

Préstamo estudiantil: \$80,000.00 con una tasa de interés anual del 6%.

Tarjetas de crédito: \$15,000.00 con una tasa de interés promedio anual del 22%.

Actualmente pagan \$2,500.00 al mes por su hipoteca, \$800.00 al mes por su préstamo estudiantil y \$500.00 al mes por sus tarjetas de crédito. ¿Es su nivel de endeudamiento manejable o preocupante en relación con su ingreso mensual?

4. Carlos tiene una deuda de \$5,000.00 con una tarjeta de crédito que cobra un interés simple del 15% anual. Aunque tiene la capacidad de pagar más del pago mínimo de \$100.00 cada mes, decide seguir pagando solo el mínimo porque "siempre ha sido así".
- a) ¿Cuánto tiempo tardará en cubrir su deuda? _____
- b) ¿Crees que la decisión tomada por Carlos es la más adecuada? _____
5. Pedro está considerando solicitar un préstamo personal de \$10,000.00 para financiar unas vacaciones. Aunque la tasa de interés del préstamo es del 12% anual, Pedro se enfoca en el hecho de que solo tendrá que pagar \$200.00 al mes en intereses. ¿Cómo podría influir un "abono chiquito" en su percepción del costo total del préstamo y en su capacidad para tomar decisiones financieras informadas?
-

6. Ana está considerando dos opciones de inversión: una cuenta de ahorros con interés simple del 3% anual y una inversión en acciones que, históricamente ha tenido un rendimiento del 8% anual. Aunque la inversión en acciones tiene un rendimiento potencialmente mayor, Ana recuerda vívidamente una situación en la que el mercado de valores experimentó una caída significativa. ¿Cómo podría incidir su experiencia sobre el riesgo en su decisión de dónde invertir su dinero?

7. Juan deposita \$6,000.00 en una cuenta de ahorros que ofrece un interés compuesto del 7% anual. Si desea tener \$35,000.00 en su cuenta, ¿cuántos años le tomará alcanzar su objetivo? _____
8. Ernesto ha invertido \$9,000.00 en un fondo que ofrece una tasa de interés compuesto del 0.7% anual, capitalizado bimestralmente. Después de 6 años, le dice a su asesor financiero que su inversión debe haber crecido aproximadamente \$17,578.33. El asesor le confirma que su cálculo es correcto. ¿Es esto realmente cierto?

9. La compañía "Inversiones Futuro", ofrece a sus clientes un plan de inversión con una tasa de interés anual del 5%. Si la tasa de inflación anual es del 7%, calcula la Ganancia Anual Total real que obtendrían los clientes de "Inversiones Futuro".

10. María, decidió abrir una cuenta de ahorros que ofrece una tasa de interés anual del 1.5%. Si la tasa de inflación anual es del 1.5%, ¿cuál es la Ganancia Anual Total real de la inversión de María? _____
11. Ana, decidió invertir en un certificado de depósito (CD) que ofrece una tasa de interés anual del 6.5%. Si la tasa de inflación anual es del 2.75%, ¿cuál es la Ganancia Anual Total real de la inversión de Ana? _____

Autoevaluación y coevaluación 8.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 8. Responde con honestidad, a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identifiqué las variables para el cálculo de interés simple y compuesto (M2-C3).			
Explicué el efecto de la inflación en la ganancia actual, usando lenguaje matemático y natural (M1-C4).			
Comenté los descubrimientos sobre la adquisición de deudas y su manejo responsable (M2-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 8, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identificó las variables para el cálculo de interés simple y compuesto (M2-C3).			
Explicó el efecto de la inflación en la ganancia actual, usando lenguaje matemático y natural (M1-C4).			
Comentó los descubrimientos sobre la adquisición de deudas y su manejo responsable (M2-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Figuras geométricas planas y su área

Progresión de aprendizaje 9

Conceptualiza el área de una superficie, y deduce fórmulas para calcular áreas de figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos, trapecios, etc., utilizando principios y propiedades básicas de geometría sintética.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos, al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A		
	C		
	H		
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición, para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A		
	C		
	H		
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A		
	C		
	H		

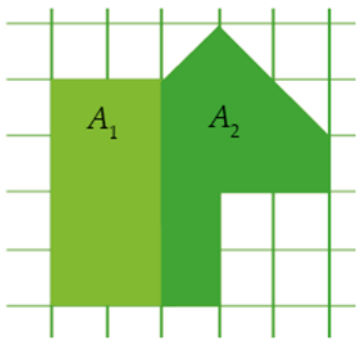
La geometría y el álgebra, aunque distintas ramas de las matemáticas, se complementan en el estudio de las formas y el espacio. Mientras la geometría se centra en el análisis de figuras y sus propiedades mediante métodos visuales y deductivos, el álgebra aporta herramientas para cuantificar y generalizar estas relaciones. Por ejemplo, al resolver problemas, cuando se requiere, usamos representaciones geométricas y en el cálculo de áreas, usamos modelos y aplicamos algoritmos algebraicos.

Actividad diagnóstica 9.1

Relaciona las siguientes preguntas con su posible respuesta.

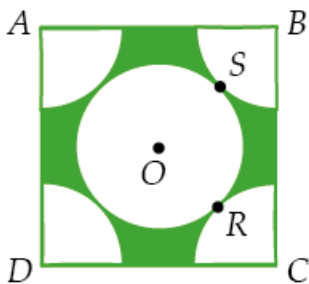
- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. Porción del plano, limitada por tres rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices. | () Polígono regular |
| 2. Paralelogramo con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. | () Trapecio |
| 3. Paralelogramo con cuatro ángulos rectos. | () Cuadrado |
| 4. Superficie del plano limitado por una circunferencia. | () Triángulo |
| 5. Polígono, donde todos sus lados y ángulos interiores miden lo mismo y tienen la propiedad de que es posible inscribirlos en una circunferencia, es decir, todos sus vértices están en la circunferencia. | () Rectángulo
() Círculo |
| 6. Cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos. | |

Las figuras geométricas, regulares e irregulares, se encuentran en todas partes a nuestro alrededor, tanto en el mundo natural como en el mundo creado por el hombre. Cada tipo de figura tiene sus propias propiedades y aplicaciones, y ambas juegan un papel importante en nuestra vida cotidiana. Como lo muestran las Figuras 9.1 y 9.2.



Supón que deseas adquirir un terreno, y tienes dos opciones de compra como se muestra en la Figura 9.1. Ambos terrenos tienen el mismo precio y la misma calidad de tierra, así que eliges el más grande. Para ello, descargas de un sitio de internet una fotografía aérea que abarca los dos terrenos. ¿Cómo determinarías cual es el terreno más grande?

Figura 9.1. Terrenos de áreas con figuras irregulares.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).



En la Figura 9.2 se tiene el cuadrado $ABCD$ de 32 cm de lado, R y S son puntos medios de \overline{OC} y \overline{OB} respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. ¿Cómo determinas el área sombreada?

Figura 9.2. Área con forma irregular.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Áreas de figuras geométricas simples

El área, es una medida que se utiliza, para cuantificar el tamaño de una superficie en dos dimensiones, es decir cuánto espacio ocupa esta superficie en el plano, y se expresa en unidades cuadradas: metros cuadrados (m^2), centímetros cuadrados (cm^2), kilómetros cuadrados (km^2), etc.; estas unidades pertenecen al Sistema Internacional de Unidades (SIU). Existen otros sistemas de unidades como el Sistema Inglés, en el cual se manejan las siguientes unidades cuadradas: Pies cuadrados (ft^2), Pulgadas cuadradas (in^2), yardas cuadradas (yd^2), etc.

En términos más simples, el área nos permite cuantificar la superficie encerrada por una figura geométrica. Por ejemplo, el área de un rectángulo nos indica cuántos metros cuadrados de espacio ocupa su superficie.

El cálculo del área, varía según la forma de la figura. Para figuras simples como rectángulos, triángulos, círculos y trapecios, existen fórmulas específicas basadas en principios geométricos que nos permiten calcular su área.

Triángulos

Un **triángulo**, es una porción del plano limitada por 3 rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices, como se muestra en la Figura 9.3.

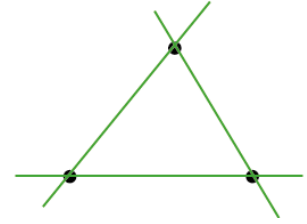


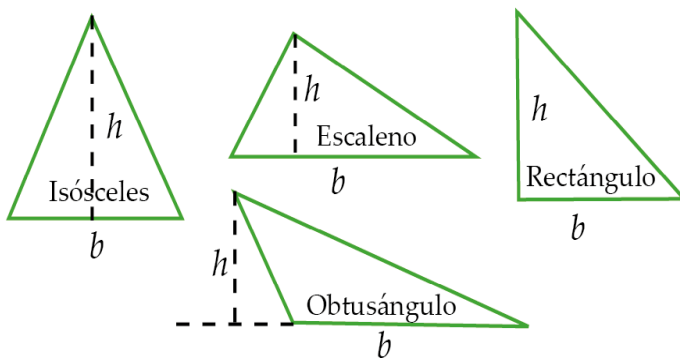
Figura 9.3. Triángulo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Base y altura de un triángulo (Figura 9.4)

Base: es uno cualquiera de sus lados sobre el que se apoya.

Altura: es un segmento perpendicular desde uno de sus vértices a la recta que contiene al lado opuesto de dicho vértice.



Propiedades de los triángulos:

1. En todo triángulo, el segmento que une los puntos medios es paralelo al lado restante y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.
2. La suma de las medidas de los ángulos interiores es iguala 180° .
3. Dos **triángulos** son **congruentes** o iguales, si y solo si, tienen exactamente el mismo tamaño y la misma forma. Si dos triángulos son congruentes, entonces los ángulos y lados correspondientes son congruentes o iguales.
4. Dos **triángulos** son **semejantes**, si sus ángulos respectivos son iguales, y sus lados homólogos son proporcionales.
5. La **Mediana** de un triángulo, es un segmento que conecta un vértice del triángulo, con el punto medio del lado opuesto de dicho vértice. El punto donde concurren las medianas, se denomina baricentro o centroide. Ese punto, es el centro de gravedad del triángulo. Las medianas dividen un triángulo en seis triángulos que tienen la misma área.

Ejemplo formativo 9.1

En la Figura 9.5, A , B y C son los puntos medios de los lados del ΔRTS , además $\angle RTS = 90^\circ$. Determina el área del ΔBAC , si $\overline{RT} = 30$ cm, $\overline{RS} = 34$ cm y $\overline{ST} = 16$ cm .

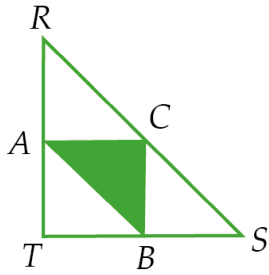


Figura 9.5. Área del $\triangle ACB$.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Utilizando la propiedad sobre los puntos medios de los lados del triángulo se tiene que:

$\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 15$ cm y $\overline{AB} = 17$ cm, por lo que el $\triangle BAC \sim \triangle RTS$, entonces el área sombreada es:

$$A_s = \frac{bh}{2} = \frac{15(8)}{2} = 60$$

Por tanto, el área del triángulo BAC es de 60 cm^2 .

Cuadriláteros

Un cuadrilátero, es una figura cerrada que se forma con cuatro segmentos de recta, que se interceptan por pares, en cuatro puntos llamados vértices. Dos cuadriláteros muy conocidos y que el cálculo de sus áreas es simple, son el cuadrado y el rectángulo.

Un **cuadrado**, es una figura formada por cuatro lados, todos de igual longitud (l) y ángulos rectos. La fórmula para determinar su área es: $A = l^2$.

Un **rectángulo** es una figura plana de cuatro lados en la que cada ángulo es un ángulo recto. Los lados opuestos son paralelos y de igual longitud. Dos son llamados bases (b) y las otras dos, alturas (a). La fórmula para determinar su área es: $A = b \cdot a$.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos entre sí.

Propiedades de los cuadriláteros:

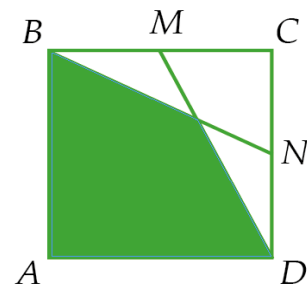
- Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.
- Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
- Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
- Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Ejemplo formativo 9.2

En la Figura 9.6, se muestra que el área de la región sombreada es 600 cm^2 M y N son puntos medios de \overline{BC} y \overline{CD} respectivamente.

Hallar el área del cuadrado $ABCD$.

Resolución:



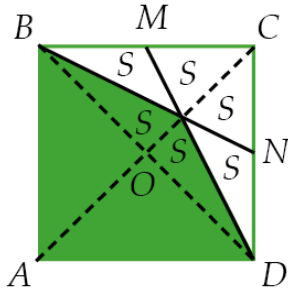


Figura 9.7. Diagonales del cuadrado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Se trazan las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} .
 M es el punto medio de \overline{BC} .
 \overline{DM} es mediana del $\triangle DCB$
 N es el punto medio de \overline{CD} .
 \overline{BN} es mediana del $\triangle DCB$.

Figura 9.6. Región sombreada del cuadrado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

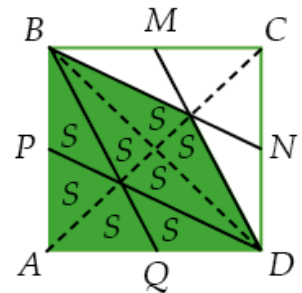
El $\triangle DCB$ se dividió en seis triángulos iguales, esto, de acuerdo con la propiedad de las medianas; en consecuencia, tienen la misma área S .

Figura 9.8. Triángulos de área S .
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Por otra parte, por ser $\triangle DAB \cong \triangle DCB$, en $\triangle DAB$, usando la propiedad de las medianas \overline{DP} y \overline{BQ} , se pueden construir de igual forma seis triángulos con área iguales.

Así, el área sombreada está formada por ocho triángulos de área S .

$$\begin{aligned} 8S &= 600 \\ S &= \frac{600}{8} \\ S &= 75 \end{aligned}$$



Por lo que, cada triángulo tiene un área $S = 75 \text{ cm}^2$.

Dado que el cuadrado $ABCD$ está formado por 12 triángulos de área $S = 75 \text{ cm}^2$, entonces, el área total es de 900 cm^2 .

Un **trapecio**, es un cuadrilátero (figura plana de cuatro lados) con un par de lados paralelos. Los lados paralelos reciben el nombre de base mayor y base menor. La altura de un trapecio es la medida que separa sus bases, como se muestra en la Figura 9.9.

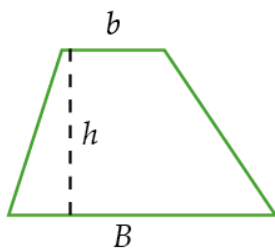


Figura 9.9. Trapecio
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Elementos del trapecio:
 B : base mayor
 b : base menor
 h : altura

Tipos de trapecio



Figura 9.10. Tipos de trapecio
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Área de un trapecio. Para un trapecio que tiene bases, B y b , y una altura, h , la fórmula para calcular su área es:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Propiedades de los trapecios:

- Un trapecio isósceles, es un trapecio cuyos lados no paralelos y son de la misma longitud.
- Un trapecio rectángulo, tiene dos ángulos rectos.
- Un trapecio escaleno, tiene los lados no paralelos desiguales.
- Los ángulos consecutivos que están entre las bases de un trapecio, son suplementarios.

Ejemplo formativo 9.3

Calcular el área de la Figura 9.11.

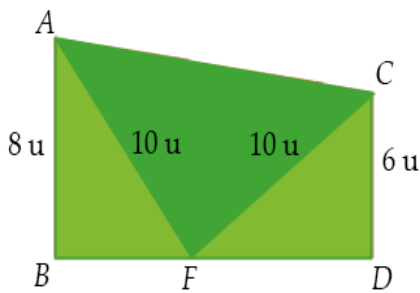


Figura 9.11. Trapecio rectángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Primero hay que determinar la longitud de los catetos faltantes en los triángulos FBA y CDF .

ΔFBA		ΔCDF
$BF^2 + AB^2 = AF^2$		$DF^2 + DC^2 = FC^2$
$BF^2 + 64 = 100$		$DF^2 + 36 = 100$
$BF^2 = 100 - 64$		$DF^2 = 100 - 36$
$BF^2 = 36$		$DF^2 = 64$
$BF = \sqrt{36}$		$DF = \sqrt{64}$
$BF = 6$		$DF = 8$

Luego, el área total del trapecio $ABDC$ se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{(8 + 6)(14)}{2} = 98$$

Por lo que el área del trapecio es 98 u^2 .

Ejemplo formativo 9.4

Retomamos la situación inicial. Supón, que vas a adquirir un terreno y tienes dos opciones de compra como se observa en la Figura 9.12. Ambos terrenos tienen el mismo precio y la misma calidad de tierra, así que eliges el más grande. Para ello, descargas de un sitio de internet una fotografía aérea que abarca los dos terrenos. ¿Cómo determinas cuál es el terreno más grande si los lados de cada cuadrado miden 10 m?

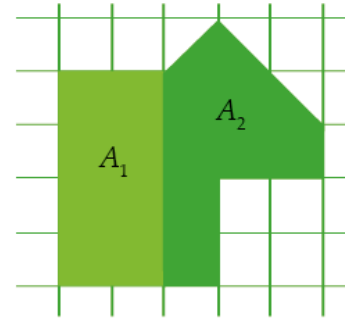


Figura 9.12. Áreas A_1 y A_2 de dos terrenos.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

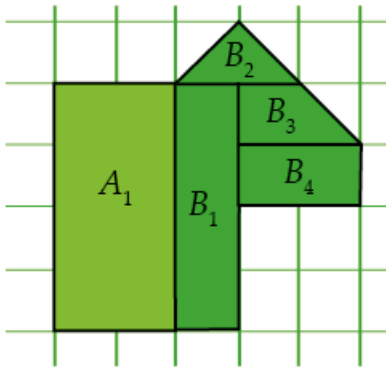


Figura 9.13. Áreas de terrenos divididas en figuras geométricas conocidas.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Primeramente, calcula el área A_1 , que es un rectángulo,

$$A_1 = b \cdot h = 20 \cdot 40 = 800 \text{ m}^2.$$

Ahora, divide el área A_2 en figuras geométricas conocidas, como se hizo en la Figura 9.13. Luego calcula las áreas B_1 , B_2 , B_3 y B_4 que corresponden al terreno de área A_2 .

El Área A_2 consta de cuatro figuras con áreas B_1 , B_2 , B_3 y B_4 .

$$B_1 = b \cdot h = 10 \cdot 40 = 400$$

$$B_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100$$

$$B_3 = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{(20 + 10)(10)}{2} = 150$$

$$B_4 = b \cdot h = 20 \cdot 10 = 200$$

$$A_2 = 400 + 100 + 150 + 200 = 850$$

Dado que A_1 tiene un área de 800 m^2 y A_2 un área 850 m^2 , conviene adquirir el terreno correspondiente a A_2 .

Polígonos regulares

En la Figura 9.14, mostramos polígonos regulares.



Figura 9.14. Polígonos regulares.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

La **Apotema** (a) de un polígono regular es el segmento de línea perpendicular trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados. Las apotemas de un polígono regular son iguales.

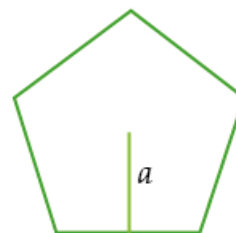


Figura 9.15. Apotema (a) de un polígono regular.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Para calcular el área de un polígono regular se usa la siguiente fórmula:

$$A = \frac{Pa}{2}$$

Donde A es el área, P el perímetro y a la apotema.

Ejemplo formativo 9.5

Un hexágono está inscrito, y otro está circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm, como se muestra en la Figura 9.16. Determina el área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos.

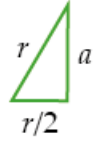
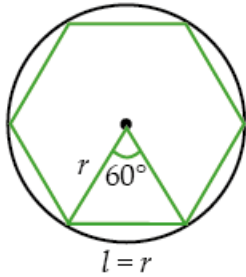
Resolución:



El área sombreada A_s , es el área del hexágono circunscrito A_c menos el área del hexágono inscrito A_i .

$$A_s = A_c - A_i$$

Figura 9.16. Hexágono inscrito y otro circunscrito a una circunferencia.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).



Para calcular el área del hexágono inscrito considera la Figura 9.17.

La medida del ángulo central es $\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Como el triángulo es equilátero se tiene que $l = r = 6$ cm.

La apotema la puedes calcular utilizando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 ; 6^2 = a^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 ; 36 = a^2 + 9$$

$$a^2 = 36 - 9 = 27 ; a = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

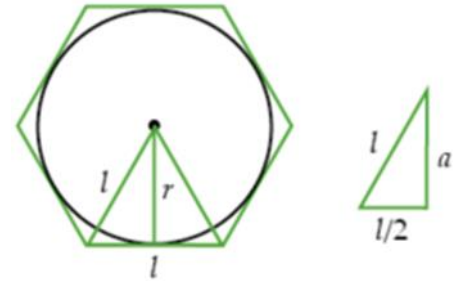
Figura 9.17. Hexágono inscrito.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Entonces, el área del hexágono inscrito es:

$$A_i = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6 \cdot 6)(3\sqrt{3})}{2} = \frac{(36)(3\sqrt{3})}{2} = 18(3\sqrt{3}) = 54\sqrt{3}$$

Figura 9.18. Hexágono circunscrito.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Para el hexágono circunscrito a la circunferencia, los elementos se muestran en la Figura 9.18. En este hexágono, la apotema es igual al radio y se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular l .



$$a = r = 6$$

$$l^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 ; l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 6^2 ; l^2 - \frac{l^2}{4} = 36 ; \frac{3l^2}{4} = 36$$

$$l = \sqrt{\frac{4 \cdot 36}{3}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{36}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

Entonces, el área del hexágono circunscrito es:

$$A_c = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\left(\frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 6\right)(6)}{2} = \frac{(72)(6)}{2\sqrt{3}} = \frac{432}{2\sqrt{3}} = \frac{216}{\sqrt{3}}$$

Finalmente, el área sombreada es:

$$A_s = \frac{216}{\sqrt{3}} - 54\sqrt{3} = 31.18$$

El área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos es 31.18 cm^2 .

Circunferencia y círculo

La circunferencia, es una curva cerrada cuyos puntos están en el mismo plano y a igual distancia de otro punto interior fijo que se llama centro de la circunferencia. El círculo es la superficie del plano limitado por la circunferencia (Figura 9.19).

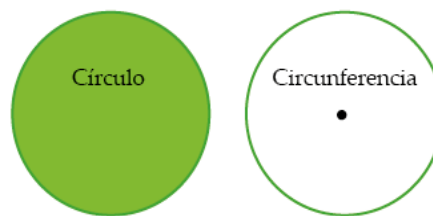


Figura 9.19. Círculo y circunferencia.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Elementos principales del círculo:

- **Radio.** Es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Su longitud se denota con la letra r .
- **Diámetro.** Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Centro.** Es el punto interior desde el que se mide la distancia a cualquier otro punto de la circunferencia.
- La longitud de una circunferencia se calcula mediante la fórmula $l = 2\pi r$, donde l es longitud de la circunferencia, r es el radio y π es una constante.
- El área de cualquier círculo se determina mediante la fórmula $A = \pi r^2$, donde A es el área del círculo, r es el radio y π es una constante.

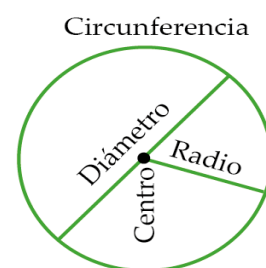


Figura 9.20. Elementos principales del círculo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Ángulos asociados a una circunferencia:

- **Ángulo central**, es aquel que está formado por dos radios. Los ángulos centrales tienen su vértice en el centro de la circunferencia.
- **Ángulo inscrito**, es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes de la circunferencia.
- **Ángulo semiinscrito**, es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es secante y el otro tangente a la circunferencia.
- Un **sector circular**, es una porción de un círculo comprendida entre dos radios y el arco de circunferencia que conecta sus extremos. Se puede visualizar como una "rebanada" de un círculo.
- La medida de un ángulo inscrito en la circunferencia, es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco.
- Los ángulos inscritos que cortan el mismo arco, son iguales.



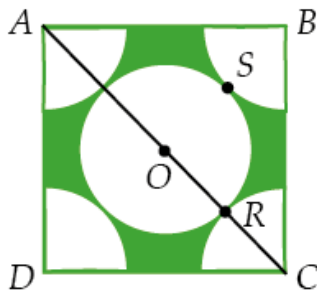
QR 9.1 Video de ángulos asociados a una circunferencia.
Fuente: Parzibyte 2024.

Ejemplo formativo 9.6

1. En la Figura 9.21, $ABCD$ es un cuadrado de 32 cm de lado, R y S son puntos medios de \overline{OC} y \overline{OB} respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. Determina el área sombreada.

Resolución:

Para determinar el área sombreada, al área del cuadrado se le resta el área del círculo central y la de los cuatro cuartos de círculo.



Primero, se calcula la diagonal \overline{AC} , como se forman dos triángulos rectángulos, para ello se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{32^2 + 32^2} = \sqrt{2(32)^2} = 32\sqrt{2}$$

Figura 9.21. Área con forma irregular.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Como R y S son puntos medios de \overline{OC} y \overline{OB} respectivamente, se tiene que $\overline{OR} = \overline{RC}$ y $\overline{OS} = \overline{SB}$, por lo que el radio de la circunferencia central es igual al radio de los cuartos de circunferencia, el cual es igual a $\frac{\overline{AC}}{4}$. Entonces, para calcular el área sombreada A_s , al área del cuadrado A_{cu} se le resta el área de dos círculos $2A_{ci}$.

$$A_s = A_{cu} - 2A_{ci}; \quad A_{cu} = l^2 = 32^2 = 1024; \quad 2A_{ci} = 2\pi r^2$$

Donde:

$$r = \frac{\overline{AC}}{4} = \frac{32\sqrt{2}}{4} = 8\sqrt{2}$$

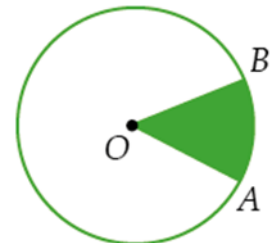
Luego, $A_{ci} = 2\pi(8\sqrt{2})^2 = 256\pi \approx 804.25$. Por lo que $A_s = 1024 - 804.25 = 219.75$.

Por lo tanto, el área sombreada es 219.75 cm^2 .

Ejemplo formativo 9.7

En la Figura 9.22, O es el centro del círculo cuyo radio mide 9 cm. Si el $\angle BOA$ mide 40° , ¿cuál es el área del sector circular sombreado?

Resolución:



La fórmula para calcular el área del sector circular es $A_s = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$, donde θ es el ángulo central y r es el radio de la circunferencia.

Para $\theta = \angle BOA = 40^\circ$ y $r = 9$, el área sombreada A_s es:

$$A_s = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{40^\circ}{360^\circ} \pi (9)^2 = \frac{1}{9} \pi (9)^2 = 9\pi$$

Por lo que el área del sector circular sombreado es $9\pi \text{ cm}^2$.

Figura 9.22. Área de un sector circular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Evaluación formativa 9.1

1. Calcula el área sombreada de las siguientes figuras.

a)

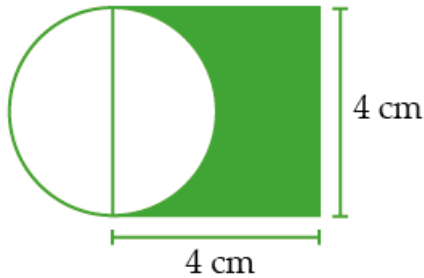


Figura 9.23. Área sombreada.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

b)

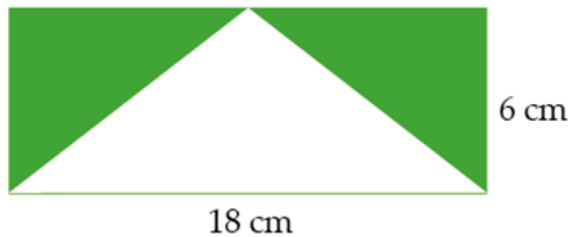


Figura 9.24. Área sombreada.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

2. Si $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide 6 m, y además M es el punto medio de \overline{AD} ; calcula el área de la región sombreada.

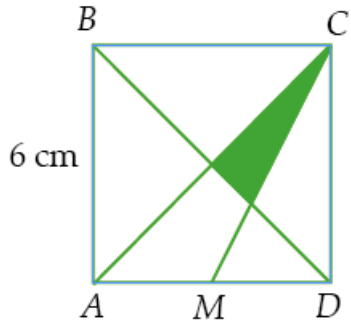


Figura 9.25. Área de la región sombreada.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

3. Calcula el área del trapecio.

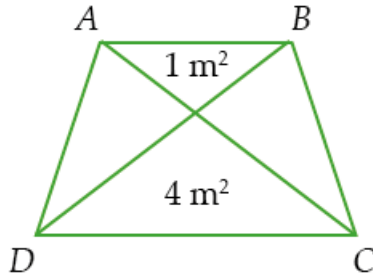


Figura 9.26. Trapecio.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

4. Una cabra, está atada con una cuerda, a una esquina exterior de una cabaña rectangular de 6 m de largo y un ancho de 4 m. La cuerda es de 8 m, ¿cuál es el área donde la cabra puede pastar?

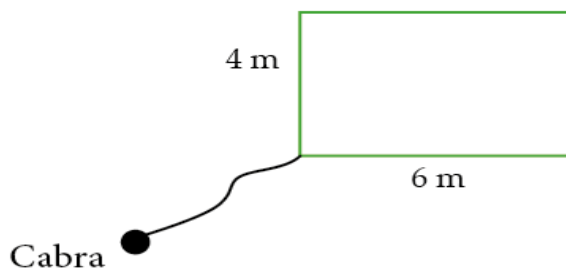


Figura 9.27. Cabra pastando.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

5. Calcula el área del ΔBAC , si $\overline{BD} = 5$ cm, $\overline{CF} = 20$ cm y $DEFA$ es un cuadrado de 4 cm por lado.

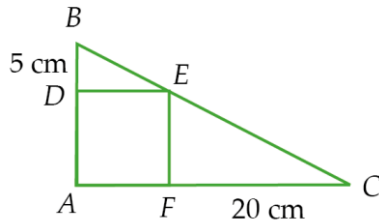


Figura 9.28. Triángulo rectángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

6. Una vela triangular de una barca se ha estropeado y hay que sustituirla por otra. Para confeccionar la nueva vela nos cobran \$690.00 por metro cuadrado. ¿Cuánto costará esa nueva vela si debe tener 8 m de alto y 3 m de base?

7. Calcula el área del siguiente triángulo.

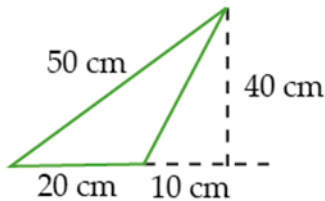


Figura 9.29. Triángulo escaleno.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

8. Encontrar el área del cuadrado $ABCD$ si $\overline{AC} = \sqrt{3}$.

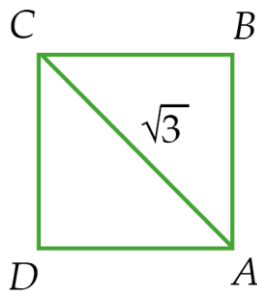


Figura 9.30. Cuadrado $ABCD$.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

9. Calcula el área de los siguientes trapezios. En la Figura 9.31, la región entre las líneas punteadas es un cuadrado.

a)

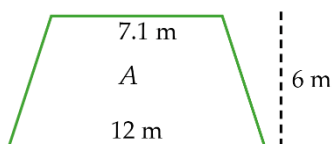


Figura 9.31 Trapecio de área A .

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

b)

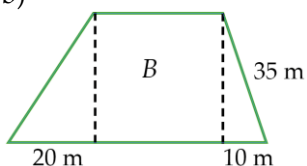


Figura 9.32. Trapecio de área B .

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

10. Jesús quiere decorar una pared de 200 cm de ancho y 300 cm de alto del baño de su casa, con un azulejo de forma hexagonal como el que se muestra en la Figura 9.33. ¿Cuántas piezas necesita Jesús para decorar la pared?

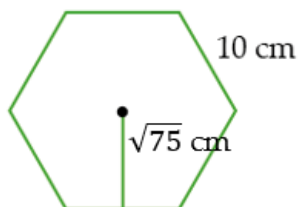


Figura 9.33. Hexágono.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

11. Hallar el área de un sector circular, cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito, si el radio de la circunferencia es 2 cm.

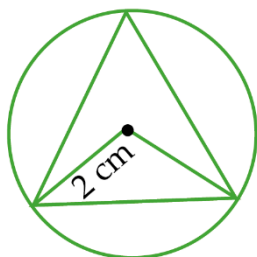


Figura 9.34. Área de un sector circular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

12. Determina el área de la zona no sombreada de la Figura 9.35, si el diámetro del círculo mayor mide 18 cm.



Figura 9.35. Área formada por círculos.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

13. Si en la Figura 9.36, $ABCD$ es un cuadrado y el área del cuadrado $A'B'C'D'$ es 392 cm^2 , determina el área sombreada.

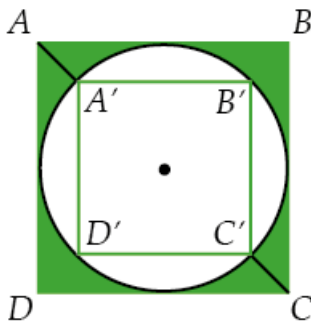


Figura 9.36. área sombreada.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Autoevaluación y coevaluación 9.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 9. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
-----------	---------------------	-------	---------------

Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Resolví problemas del cálculo de áreas aplicando procedimientos algebraicos y propiedades geométricas de las figuras (M2-C1).			
Usé la intuición para calcular el área de figuras geométricas no regulares (M2-C2).			
Deduje propiedades geométricas de las figuras que facilitan el cálculo del área (M4-C2).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 9, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			

Resolvió problemas del cálculo de áreas aplicando procedimientos algebraicos y propiedades geométricas de las figuras (M2-C1).			
Usó la intuición para calcular el área de figuras geométricas no regulares (M2-C2).			
Dedujo propiedades geométricas de las figuras que facilitan el cálculo del área (M4-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Elementos básicos de geometría analítica

Progresión de aprendizaje 10

Emplea un sistema de coordenadas y algunos elementos básicos de geometría analítica, como la distancia entre dos puntos en el plano, para calcular áreas de figuras geométricas básicas y compara estos resultados con los cálculos obtenidos, empleando principios básicos de geometría sintética.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático, en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 10.1

- Marca los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$ en el plano cartesiano de la Figura 10.1.
 - Une los puntos.
 - Calcula el área de la figura que se forma.

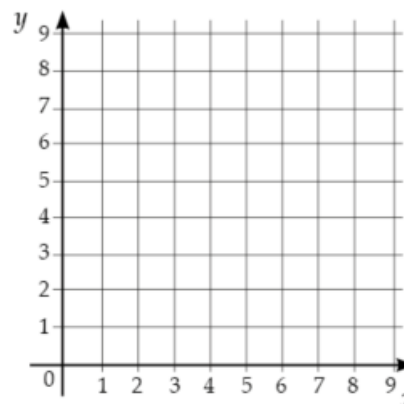


Figura 10.1. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

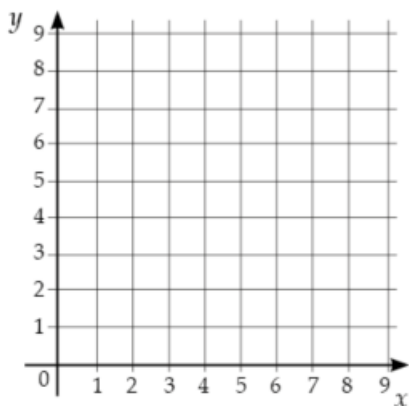


Figura 10.2. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

- Marca los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$ en el plano cartesiano de la Figura 10.2.
 - Une los puntos.
 - Calcula el área de la figura que se forma.

- ¿Qué dificultades enfrentaste para calcular el área de la figura formada en el ejercicio 2?

Un arquitecto está encargado de diseñar un nuevo parque en tu ciudad. Para esto, necesita crear un plano que incluya figuras geométricas básicas como triángulos, rectángulos y círculos. Este plano arquitectónico, será usado para calcular áreas y distancias entre diferentes puntos clave del parque, asegurando así una correcta distribución de los espacios recreativos y áreas verdes.

Un estudiante de bachillerato ve al arquitecto y a un ingeniero comentando sobre el plano, y les dice que el centro de la fuente, una esquina de la cancha de basquetbol y el punto donde inician los baños forman un triángulo. Luego, les pregunta, ¿cómo le hacen para calcular su área?

El ingeniero, con base a su experiencia, le responde que hay diversos métodos para calcular su área, unos más complejos que otros, usando métodos de la geometría sintética o de la geometría analítica.

Usando métodos tradicionales de la geometría sintética:

1. En el caso de que te sea fácil conocer las dimensiones de la base y de la altura del triángulo, puedes usar la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.
2. Otra opción es medir de forma directa la longitud de sus tres lados (a , b y c), luego, usa la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo.
3. Y una tercera opción es, dibujar el triángulo ABC en el plano arquitectónico y, con un escalímetro, medir la longitud de sus lados y luego, usar la fórmula de Herón.

Usando métodos de la geometría analítica:

1. Coloca el triángulo en un sistema de coordenadas rectangulares y marca sus vértices con los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. Luego, si con solo observar el triángulo puedes determinar las dimensiones de la base y de la altura, usa la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.
2. Un segundo método es, si después de ubicar los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, no te es posible determinar por observación directa la longitud de la base y de la altura, entonces utiliza la siguiente fórmula del área de Gauss para determinar el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

3. Un tercer método es, calcular la distancia entre cada par de vértices mediante la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; luego, usa la fórmula $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es el semiperímetro del triángulo.

4. Un cuarto método, que puedes aplicar después de marcar los vértices del triángulo con los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, es elegir cuál lado consideras como la base, por ejemplo, el segmento \overline{AB} , luego, calcula su longitud mediante la fórmula $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Posteriormente, calcula la altura mediante la fórmula de la distancia de un punto a una recta: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Por último, usa la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

A lo que responde el joven, que le interesa saber cómo aplican los procedimientos de la geometría analítica para calcular el área de un triángulo, entonces el ingeniero le propone que lo hagan juntos; primero, para un triángulo que tiene como coordenadas de sus vértices los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$ y después, para uno cuyas coordenadas sean los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$.

Ejemplo formativo 10.1

Determina el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$.

Resolución:

Paso 1. Ubica los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$ en el plano cartesiano de la Figura 10.3 y únelos.

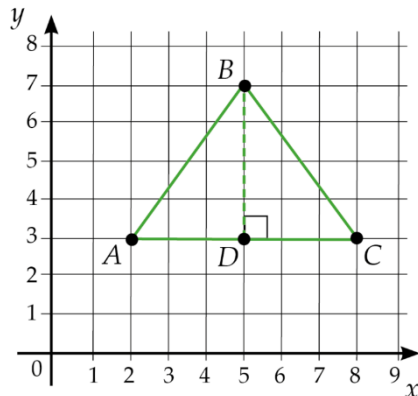


Figura 10.4. Triángulo ABC.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

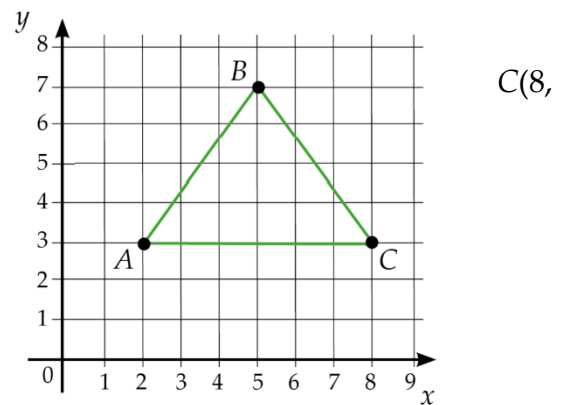


Figura 10.3. Triángulo ABC.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Paso 2. Verifica si por observación directa es posible determinar la longitud de la base y de la altura.

Por observación directa de la Figura 10.4, la longitud de la base \overline{AC} es seis unidades (u) y de su altura \overline{BD} es cuatro unidades. Nota que el punto medio entre A y C es D .

Paso 3. Usa la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es 12 u^2 .

Para calcular el área de un triángulo en el que por observación directa no es posible determinar la longitud de la base ni de la altura, usa la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

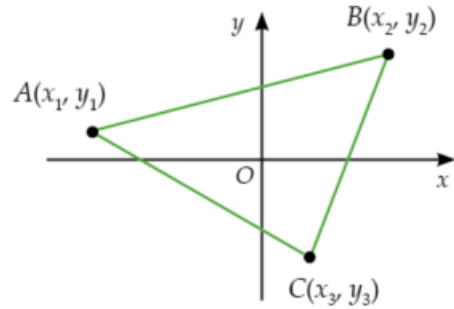


Figura 10.5. Triángulo ABC.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 10.2

Determina el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$.

Resolución:

Paso 1. Ubica los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$ en el plano cartesiano de la Figura 10.6 y únelos.

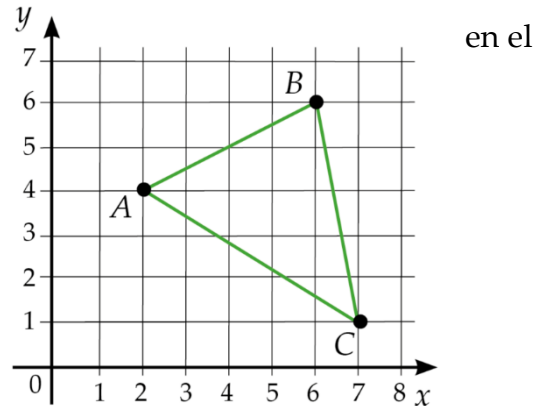


Figura 10.6. Triángulo ABC.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Paso 2. Por observación directa no es posible determinar la longitud de la base y de la altura. En este caso, usa la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

donde $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_2 = 6$, $x_3 = 7$, $y_3 = 1$.

$$A = \frac{1}{2} |2(6 - 1) + 6(1 - 4) + 7(4 - 6)|$$

$$A = \frac{1}{2} |2(5) + 6(-3) + 7(-2)|$$

$$A = \frac{1}{2} |10 - 18 - 14|$$

$$A = \frac{1}{2} |-22|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 22$$

$$A = 11$$

De donde, el área del triángulo ABC es 11 u^2 .

A continuación, usa la fórmula de la **distancia entre dos puntos**, por ejemplo, la distancia de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ mediante $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, para calcular la longitud de los tres lados del triángulo y así, obtener su área con la fórmula $A = \sqrt{s(s - d_{AB})(s - d_{BC})(s - d_{CA})}$,

donde:

$$s = \frac{d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}}{2}$$

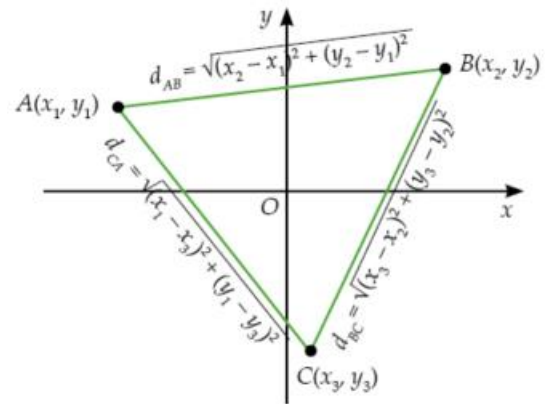


Figura 11.8. Distancia entre dos vértices de un triángulo.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 10.3

Determina el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$, usando la distancia entre dos puntos para determinar la distancia entre cada par de vértices.

Resolución:

Coordenada de los vértices: $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$.

Distancia del vértice A al vértice B .

$$x_1 = 2, y_1 = 4, x_2 = 6, y_2 = 6$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (6 - 4)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{16 + 4}$$

$$d_{AB} = \sqrt{20}$$

$$d_{AB} = \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$d_{AB} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{AB} \approx 4.472$$

La distancia de A a B es $2\sqrt{5} \text{ u}$.

Distancia del vértice B al vértice C .

$$x_1 = 6, y_1 = 6, x_2 = 7, y_2 = 1$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(7 - 6)^2 + (1 - 6)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{1^2 + (-5)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{1 + 25}$$

$$d_{BC} = \sqrt{26}$$

$$d_{BC} \approx 5.099$$

La distancia de B a C es $\sqrt{26} \text{ u}$.

Distancia del vértice C al vértice A.

$$x_1 = 7, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 4$$

$$d_{CA} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(2 - 7)^2 + (4 - 1)^2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{25 + 9}$$

$$d_{CA} = \sqrt{34}$$

$$d_{CA} \approx 5.831$$

La distancia de C a A es $\sqrt{34}$ u.

Para calcular el área, usa la fórmula $A = \sqrt{s(s - d_{AB})(s - d_{BC})(s - d_{CA})}$, donde $s = \frac{d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}}{2}$.

$$s = \frac{d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{26} + \sqrt{34}}{2} \approx 7.701$$

Luego

$$A \approx \sqrt{7.701(7.701 - 4.472)(7.701 - 5.099)(7.701 - 5.831)}$$

$$A \approx 10.9997$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es aproximadamente 11 u².

Otra forma para calcular el área de un triángulo como el de la Figura 10.12, es usar la fórmula de la distancia entre dos puntos para determinar la longitud de la base \overline{CB} , $d_{CB} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$ y luego, calcular la **distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$** mediante la fórmula

$$d_{Ar} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Luego, calcular el área mediante la fórmula

$$A = \frac{d_{CB} \cdot d_{Ar}}{2}$$

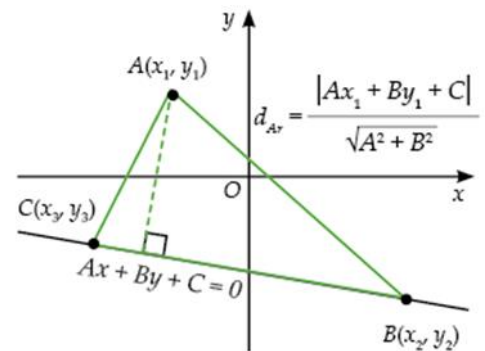


Figura 10.12. Distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 10.4

Dado el triángulo con vértices $A(-1, -1)$, $B(6, 2)$ y $C(1, 5)$:

- Calcula la distancia del punto A al punto B .
- Calcula la distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B .
- Determina el área del triángulo ABC .

Resolución:

- a) Calcula la distancia del punto A al punto B .

$$d_{AB} = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

La distancia del punto A al punto B es $d_{AB} = \sqrt{58}$ u.

- b) Calcula la distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B .

Necesitas la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, -1)$ y $B(6, 2)$, que es de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde $x_1 = -1$ y $y_1 = -1$. Además, m es la pendiente de la recta y se obtiene mediante

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{6 - (-1)} = \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

Sustituyendo $m = 3/7$, $x_1 = -1$ y $y_1 = -1$ en $y - y_1 = m(x - x_1)$, obtienes:

$$y - (-1) = \frac{3}{7}[x - (-1)]$$

$$y + 1 = \frac{3}{7}(x + 1)$$

$$7y + 7 = 3x + 3$$

igualando a cero: $0 = 3x - 7y - 4$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $3x - 7y - 4 = 0$, en su forma general $Ax + By + C = 0$.

Ahora, calcula la distancia $C(1, 5)$ a la recta $3x - 7y - 4 = 0$.

Sustituyendo $x_1 = 1, y_1 = 5, A = 3, B = -7$ y $C = -4$ en $d_{Cr} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

$$d_{Cr} = \frac{|(3)(1) + (-7)(5) + (-4)|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|3 + (-35) - 4|}{\sqrt{9 + 49}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|3 - 35 - 4|}{\sqrt{58}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|-36|}{\sqrt{58}}$$

$$d_{Cr} = \frac{36}{\sqrt{58}}$$

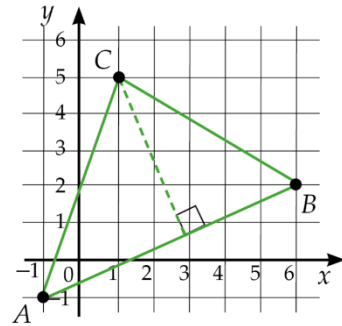


Figura 10.13. Distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

La distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B es $d_{Cr} = \frac{36}{\sqrt{58}}$ u.

c) Determina el área del triángulo ABC.

$$A = \frac{d_{AB} \cdot d_{Cr}}{2} = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{36}{\sqrt{58}}}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es 18 u^2 .

Evaluación formativa 11.1

1. Calcula el área del paralelogramo ABCD cuyos vértices son A(1, 1), B(4, 2), C(5, 5) y D(2, 4).
2. Calcula el área del paralelogramo MNOP cuyos vértices son M(-13, 11), N(-1, 3), O(-9, 1) y P(-15, 5).
3. Reto matemático.
 - a) A partir del segmento \overline{AB} con extremos A(-4, 1) y B(4, -3), determina las coordenadas del vértice C del triángulo equilátero ABC.
 - b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) Determina las coordenadas del punto medio de cada lado del triángulo ABC .

d) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos medios del triángulo ABC .

4. Un agricultor posee un terreno con vértices en $A(1, 3)$, $B(3, -2)$, $C(-4, -3)$ y $D(-3, 1)$. El agricultor necesita dividirlo en dos triángulos con áreas lo más iguales posible para optimizar el uso del espacio para diferentes cultivos. ¿Cuál es el área de cada triángulo?

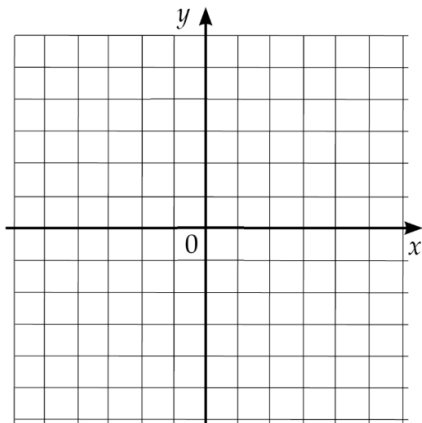


Figura 10.14. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

5. Calcula el área de la figura que se forma al unir los puntos $A(0, -2)$, $B(2, 0)$, $C(-0.5, 2.5)$, $D(2, 5)$, $E(-4, 2)$, $F(-5, -2)$ y $G(-2.5, 0.5)$.

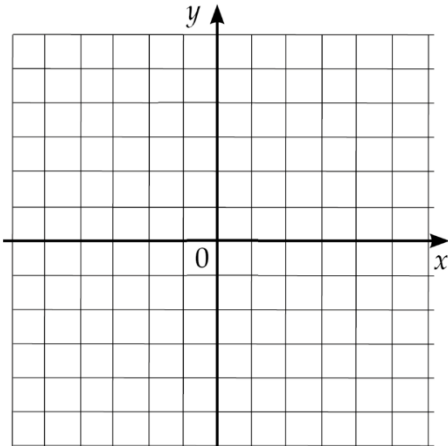


Figura 10.15. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

6. Usa la distancia entre dos puntos para determinar la longitud de los lados del triángulo formado por los puntos $A(0, 0)$, $B\left(-\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}\right)$, $C(-4.5, 4.5)$ y, calcula su área.

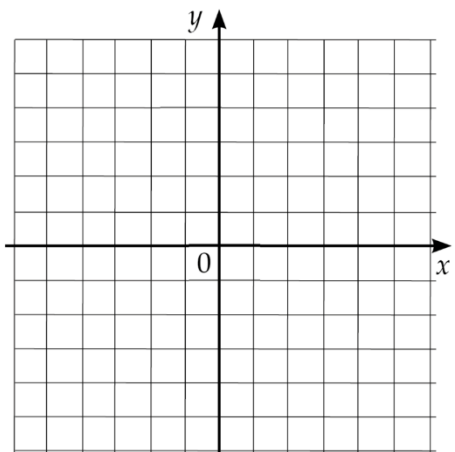


Figura 10.16. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

7. Calcula el área del rectángulo que se muestra en la Figura 10.11.

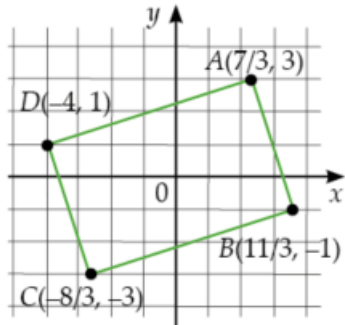


Figura 10.17. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

8. Dado el triángulo con vértices $A(-1, 5)$, $B(-7, 3)$ y $C(5, 1)$.
- Calcula la distancia del punto B al punto C .
 - Calcula la distancia del punto A a la recta que pasa por los puntos B y C .
 - Determina el área del triángulo ABC .

9. Calcula el área del paralelogramo $PQRS$ con vértices $P(-2, -1)$, $Q(2, 1)$, $R(3, 4)$ y $S(-1, 2)$.

10. Calcula el área del trapecio $MNOP$ con vértices $M(-5, 5)$, $N(3, 7)$, $O(8, 3)$ y $P(-8, -1)$.

Autoevaluación y coevaluación 10.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ___ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 10. Responde con honestidad, a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Analiqué críticamente la aplicación de la distancia entre dos puntos en el cálculo de áreas. (M2-C1).			
Elegí el modelo matemático adecuado para calcular el área de figuras geométricas (M1-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 10 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente

Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconoció que el lenguaje matemático es más preciso y riguroso, en comparación con la flexibilidad del lenguaje natural (M1-C4).			
Analizó críticamente el uso de la distancia entre dos puntos en el cálculo de áreas. (M2-C1).			
Eligió el modelo matemático adecuado para calcular el área de figuras geométricas (M1-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Resolución de problemas aplicando funciones lineales, cuadráticas y polinomiales

Progresión de aprendizaje 11

Modela situaciones y resuelve problemas significativos para el estudiantado, tanto de manera algebraica como geométrica, al aplicar propiedades básicas de funciones lineales, cuadráticas y polinomiales.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A		
	C		
	H		

Evaluación diagnóstica 11.1

Lee cada pregunta y selecciona la respuesta correcta.

- ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación $5 - (2 + 3)$?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
- Es el resultado de simplificar: $2x + 3x - 5x + 4x^2 - 2x^2 + x$.
 a) $2x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 4x$ c) $2x^2 + 6x$ d) $2x^2 + x$
- Factoriza la siguiente expresión $x^2 + 5x + 6$.
 a) $(x + 2)(x - 3)$ b) $(x + 1)(x + 6)$ c) $(x + 3)(x + 2)$ d) $(x + 4)(x + 1)$
- ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación $2x - 9 = 11 - 3x$?
 a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$
- ¿En qué cuadrante del plano cartesiano se encuentra el punto $(-2, -3)$?
 a) Primero b) Segundo c) Tercero d) Cuarto
- ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, 4)$?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Planificación del presupuesto para combustible

Problema real (lenguaje natural). Carlos es un repartidor, que necesita planificar su presupuesto semanal para combustible. Sabe que su vehículo consume en promedio, ocho litros de gasolina por cada 100 kilómetros recorridos. Cada semana, Carlos recorre una

distancia total variable, dependiendo de la cantidad de entregas que tenga. Esta semana estima que recorrerá d kilómetros y quiere calcular cuántos litros de gasolina necesitará y el costo asociado, sabiendo que el precio del litro de gasolina es de \$22.00.

Matematizar. Para resolver este problema, Carlos decide modelarlo matemáticamente. Sabe, que necesita calcular la cantidad de gasolina G necesaria, en función de la distancia d recorrida. Utilizando la relación de consumo de combustible (ocho litros por cada 100 kilómetros), la función matemática que representa este problema es:

$$G(d) = 0.08d$$

Resolver. Ahora, Carlos puede usar esta función para calcular los litros de gasolina necesarios. Supongamos que esta semana estima que recorrerá 250 kilómetros. Sustituyendo este valor en la función:

$$G(250) = 0.08(250)$$

$$G(250) = 20$$

Para calcular el costo total de la gasolina, Carlos multiplica la cantidad de litros necesarios por el precio de un litro:

$$\text{Costo} = G(250) \times 22$$

$$\text{Costo} = 20 \times 22$$

$$\text{Costo} = 440$$

Interpretar. El resultado matemático, indica que Carlos necesita 20 litros de gasolina y que esto le costará \$440.00 para recorrer los 250 kilómetros estimados esta semana.

Validar. Carlos valida el resultado, comparando su estimación con sus experiencias anteriores. Si encuentra que su consumo de gasolina y el costo, corresponden a lo que ha calculado, puede planificar su presupuesto con mayor confianza, asegurando que tiene suficientes fondos para cubrir sus necesidades de combustible durante la semana.

Resumen del método alternativo al método de cuatro pasos de Pólya

Problema: Carlos necesita planificar su presupuesto para combustible, basado en la distancia que recorrerá.

Matematizar: modela el problema con una función matemática que relaciona la distancia recorrida con la cantidad de gasolina necesaria.

Resolver: utiliza la función para calcular los litros de gasolina necesarios y el costo asociado.

Interpretar: traduce el resultado matemático a un contexto real, ajustando su presupuesto semanal para cubrir los costos de combustible.

Validar: verifica que su estimación de combustible y costos corresponden a su experiencia, asegurando la precisión de su planificación.

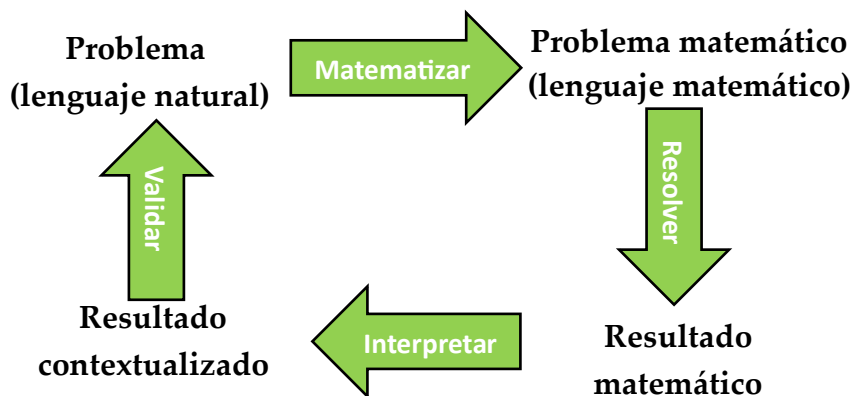


Figura 11.1. Proceso solución de un problema.
Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Mediante el proceso descrito en la Figura 11.1, Carlos puede gestionar mejor sus recursos financieros y optimizar su planificación semanal de combustible, aplicando conceptos matemáticos a problemas prácticos de su trabajo diario.

Funciones matemáticas

Imagina que quieres saber, cuál es el volumen de una naranja que vas a comer. Es difícil calcularlo exactamente, pero puedes usar un modelo para obtener una aproximación. Un modelo es una representación simplificada de la realidad que te ayuda a comprenderla mejor.

Hay tipos de modelos, como mapas, dibujos, maquetas, e incluso personas que posan para artistas. En matemáticas, los modelos constituyen la base para estudiar y entender problemas propios de las áreas del conocimiento como: economía, ingeniería, medicina, química, física, psicología, etc.

Un **modelo matemático**, es la representación simplificada de la realidad. En particular, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, o de ecuaciones que representan sus relaciones. Un modelo, se obtiene durante el proceso de solución de un problema real, como se ve en la Figura 11.1.

Para construir un modelo matemático, debes seguir estos pasos:

- 1) **Observar la realidad:** observa la naranja y decide qué características son importantes para calcular su volumen.
- 2) **Describir el modelo:** explica con palabras, cómo vas a calcular el volumen.
- 3) **Escribir el modelo matemático:** en el caso de la naranja, la figura que más se asemeja a ella es la de una esfera, por lo que utilizaremos la fórmula para calcular el volumen de una esfera.

4) Obtener resultados: usa la fórmula para calcular el volumen de la naranja.

Retomando el ejemplo de la naranja, puedes usar una esfera como modelo. La fórmula para calcular el volumen de una esfera es igual a $\frac{3}{4}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. Si mides el radio de la naranja y lo sustituyes en la fórmula, puedes obtener su volumen.

Como ya aprendiste desde las primeras progresiones, la matemática tiene su propio lenguaje que permite describir y comprender el mundo que nos rodea. Así, las relaciones matemáticas y las funciones, son herramientas para modelar la realidad.

Una **relación**, es una regla (criterio) de correspondencia entre cada elemento del conjunto inicial o de partida (dominio), con al menos un elemento del conjunto de llegada (rango).

A diferencia de una relación, una función f es una regla que produce una correspondencia entre dos conjuntos, de modo que cada valor del primer conjunto le hace corresponder **un único valor** del segundo. Por ejemplo, la Figura 11.2 muestra la relación entre el tiempo y la temperatura ambiente.

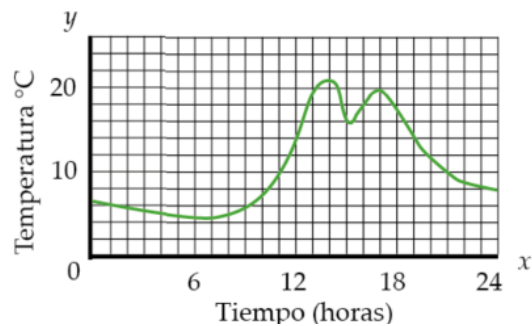


Figura 11.2. La temperatura ambiente en cierto lugar en cada instante del día.

Fuente: Elaboración propia, (GeoGebra, 2024).

También, una función puede verse como una máquina que transforma “materia prima” (por ejemplo, números), que le vamos dando, y produce “producto final” (otro número), ver Figura 11.3. Cada vez que introducimos un valor de entrada (materia prima), la máquina nos devuelve un valor salida (producto final). La notación $y = f(x)$ define función llamada f . Esto se lee como “ y es una función x ”. La letra x representa el valor de entrada, o variable independiente. La letra y , o $f(x)$, representa el valor de salida, o variable dependiente.

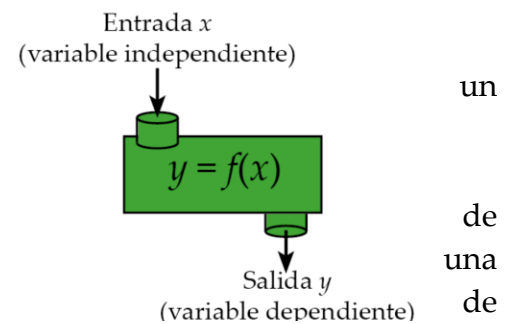


Figura 11.3. La función como una máquina de entrada y salida.

Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

A continuación, damos tres definiciones del concepto función.

Definición 1. Dados dos conjuntos A y B , una función de A en B , es una correspondencia en la que a cada elemento del conjunto A , se la asocia un único elemento del conjunto B .

Definición 2. Una función, es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) , en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y .

Definición 3. Una función $f: X \rightarrow Y$, es un conjunto de pares ordenados (x, y) , con $x \in X$ y $y \in Y$, tal que todo valor de $x \in X$ aparece como primera componente de un solo par ordenado, es decir, si (x, y_1) y (x, y_2) pertenecen a la función f , entonces $y_1 = y_2$.

Para conocer el valor " $f(x)$ " de una función f en un valor específico de x , es necesario asignarle un número real a x para evaluarla. Al conjunto de estos valores de la variable independiente x se le conoce como **dominio** de la función (D_f), y a cada número real x , en el que se puede evaluar f , está relacionado con un único valor $f(x)$, que se llama imagen de x . Al conjunto de estas imágenes de la variable independiente $f(x)$ se le conoce como **rango** (R_f), **recorrido** o **conjunto imagen** de la función.

Existen diferentes formas de representar una función, ello depende del contexto y del objetivo que se tenga. Estas son:

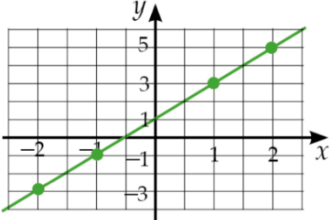
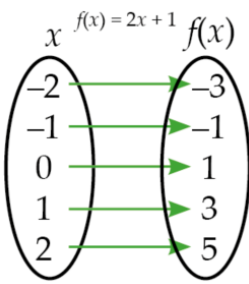
Lenguaje natural	Expresión algebraica	Gráfica																				
El doble de un número aumentado en uno	$f(x) = 2x + 1$																					
Tablas – Pares ordenados	Diagrama sagital																					
<table border="1" data-bbox="274 1041 596 1323"> <thead> <tr> <th colspan="2">$f(x) = 2x + 1$</th> <th>(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$f(x)$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>$(-2, -3)$</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td>-1</td> <td>$(-1, -1)$</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>$(0, 1)$</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>$(1, 3)$</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>5</td> <td>$(2, 5)$</td> </tr> </tbody> </table>	$f(x) = 2x + 1$		(x, y)	x	$f(x)$		-2	-3	$(-2, -3)$	-1	-1	$(-1, -1)$	0	1	$(0, 1)$	1	3	$(1, 3)$	2	5	$(2, 5)$	
$f(x) = 2x + 1$		(x, y)																				
x	$f(x)$																					
-2	-3	$(-2, -3)$																				
-1	-1	$(-1, -1)$																				
0	1	$(0, 1)$																				
1	3	$(1, 3)$																				
2	5	$(2, 5)$																				

Tabla 11.1. Diferentes representaciones de una función matemática.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Para determinar si una gráfica representa a una función, se utiliza la prueba de la **recta vertical**: si una recta vertical corta a la gráfica en más de un punto no es una función,

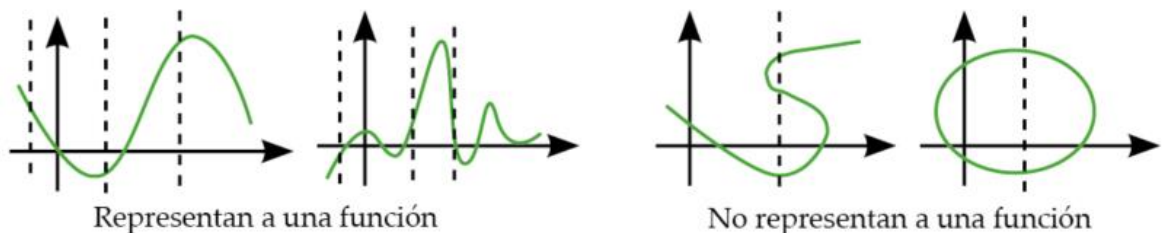


Figura 11.4. Gráficas que representan o no a una función.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

ya que, a un mismo valor de la variable independiente en el dominio, correspondería más de un valor en el conjunto imagen

Gráficamente, las funciones se analizan de izquierda a derecha. Respecto a la monotonía de la función, esta es **creciente** donde $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$. Y **decreciente** donde $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

Por ejemplo, en la Figura 11.5, la función f decrece en el intervalo (x_0, x_1) , crece en (x_1, x_2) y decrece en (x_2, x_3) .

En el punto donde la función alcanza el valor mayor, se dice que hay un **máximo**, y en el punto donde alcanza el valor menor se dice que hay un **mínimo**.

En el ejemplo del gráfico de la Figura 11.6, la función f tiene un valor mínimo $f(x_1)$ en x_1 y un valor máximo $f(x_2)$ en x_2 .

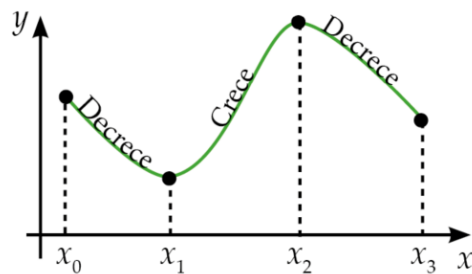


Figura 11.5. Monotonía de una función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

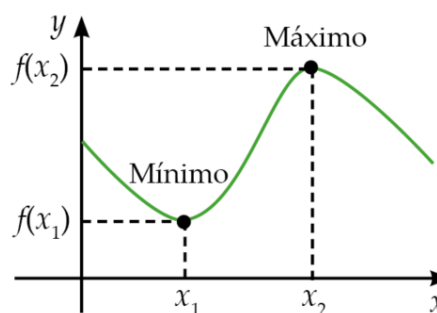


Figura 11.6. Monotonía de una función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Función lineal

Las **funciones lineales** se caracterizan por su representación gráfica, que es una línea recta en el plano cartesiano. Su expresión algebraica es de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales y $m \neq 0$. Se dice que es una función lineal, debido al exponente del término lineal mx .

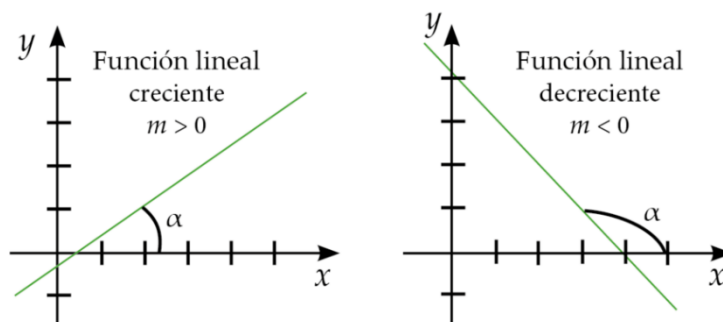


Figura 11.7. Pendiente de una función lineal.
Fuente: Elaboración propia (Demos, 2024).

La **variable independiente** es x , mientras que la **variable dependiente** es $f(x)$. La **pendiente de la recta** es m , y determina su inclinación; mientras que, el intercepto en el eje y es b , y determina el punto donde la línea cruza el eje y . El **dominio** de esta función es la recta real, $D_f: (-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función lineal está definida para todo $x \in R$. Por su parte, el **rango** de la función es la recta real, $R_f: (-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que cada $x \in D_f$ tiene una imagen en el eje y . Una función lineal es **creciente** si la

pendiente es positiva y **decreciente**, si la pendiente es negativa, como se muestra en la Figura 11.7. Además, es una función creciente o decreciente en todo su dominio.

Ejemplo formativo 11.1

Situación: optimización de la producción de empanadas mediante funciones lineales

Problema real. Doña Julia, dueña de una próspera fábrica de empanadas, se enfrenta a un dilema: la demanda de sus deliciosas empanadas aumenta sin parar, pero su proceso de producción aún es manual, lo que limita la cantidad que puede producir. Para optimizar su negocio y satisfacer la demanda de sus clientes, decide utilizar funciones lineales para modelar y resolver este problema.

Doña Julia comienza por recopilar datos sobre la producción actual. Registra el tiempo (en horas) que tarda su equipo en producir diferentes cantidades de empanadas.

Empanadas	Tiempo
200	4
400	7
600	10

Matematizar. Para determinar la relación entre las variables, Doña Julia grafica los valores de ambas variables en el plano cartesiano (ver Figura 11.8), observando que los datos forman una línea recta (relación lineal) entre el *tiempo* (y) y la *cantidad de empanadas* (x), cuyo modelo es $y = mx + b$.

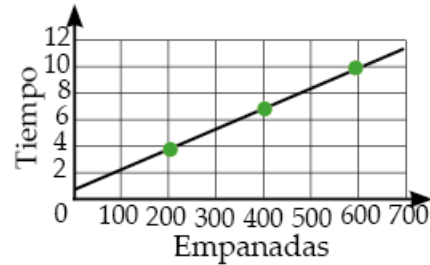


Figura 11.8. Función lineal.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Resolver. Para determinar la ecuación que modelará su función $y = mx + b$, Doña Julia, primero utiliza las coordenadas de dos de sus puntos, $(200, 4)$ y $(400, 7)$, para calcular el valor de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde $x_2 - x_1 \neq 0$. Luego, sustituye los valores para obtener, $m = \frac{7 - 4}{400 - 200} = \frac{3}{200} = 0.015$.

La ordenada en el origen (b), que es el punto donde la línea cruza el eje y , la determina la forma general en que se expresa una función lineal $f(x)$ o $y = mx + b$, reemplazando los datos.

$$\begin{aligned}
 y &= mx + b \\
 4 &= 0.015(200) + b \\
 4 &= 3 + b \\
 b &= 4 - 3 \\
 b &= 1
 \end{aligned}$$

Interpretación

$m = 0.015$ Es la pendiente de la función. Representa el tiempo adicional que Doña Julia tarda en preparar cada empanada después de la hora que le toma preparar los ingredientes. En este caso, son 0.015 horas o 0.9 minutos, por empanada.

$b = 1$ Es el tiempo que Doña Julia tarda en preparar los ingredientes, independientemente del número de empanadas que fabrique.

Así, la ecuación de la función lineal que modela la producción de empanadas de Doña Julia es, $y = 0.015x + 1$.

Validación.

Comprobamos la solución con los datos iniciales.

Para producir 200 empanadas requiere: $y = 0.015(200) + 1 = 3 + 1 = 4$ horas.

Para producir 400 empanadas requiere: $y = 0.015(400) + 1 = 6 + 1 = 7$ horas.

Para producir 600 empanadas requiere: $y = 0.015(600) + 1 = 9 + 1 = 10$ horas.

Por lo tanto, Doña Julia puede usar la función $y = 0.015x + 1$ para planificar su producción diaria de empanadas. Este modelo, le permite predecir cuántas empanadas producirá en función de las horas trabajadas, y optimizar su proceso de producción para satisfacer la demanda creciente.

Función cuadrática

Las **funciones cuadráticas**, son funciones polinómicas que se caracterizan por tener la forma general de $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son constantes, y $a \neq 0$. Estas funciones toman su nombre del término cuadrático ax^2 presente en su expresión, el cual es el responsable de generar la curvatura (parábola) en la gráfica de la misma.

Esta función se caracteriza por ser un **polinomio de segundo grado**, que tiene como **función base a $f(x) = x^2$** ; y es conocida como la **función cuadrática básica**. Su gráfica se muestra en la Figura 11.9.

El **dominio** de esta función es la recta real, $D_f: (-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función cuadrática básica está definida para todo $x \in R$. Por su parte, el **rango** de la función es $y \geq 0$, $R_f: [0, +\infty)$; esto quiere decir que cada $x \in D_f$ tiene una imagen en la parte no negativa del eje y . Esta función se caracteriza

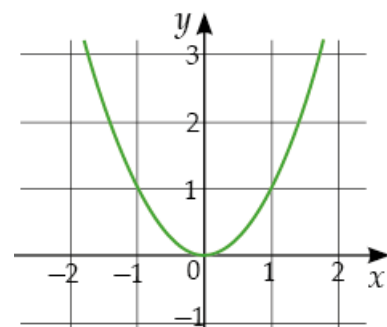


Figura 11.9. Gráfica de $f(x) = x^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

por ser **continua en todo su dominio**, esto quiere decir que para hacer su gráfica solo se requiere de un trazo.

Por su parte, la función $f(x) = -x^2$ es una reflexión de $f(x) = x^2$ sobre el eje x , como se ve en la Figura 11.10.

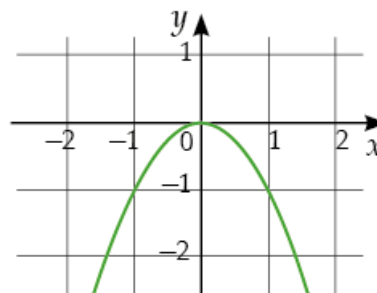


Figura 11.10. Gráfica de $f(x) = -x^2$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

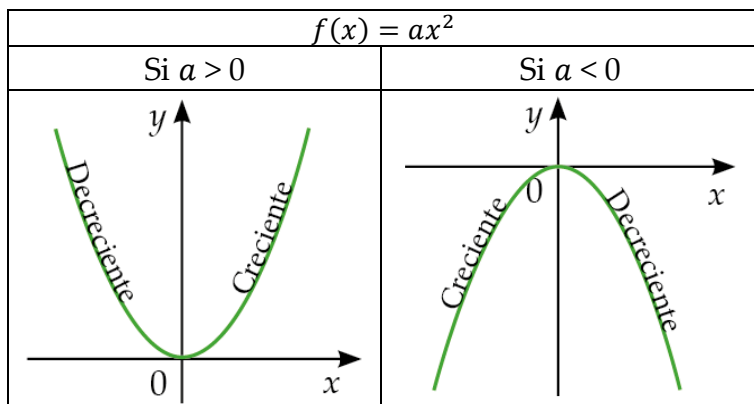


Figura 11.11. Efecto del parámetro a en la monotonía de la función $f(x) = ax^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

La **monotonía** de la función $f(x) = ax^2$ puede ser **creciente** y **decreciente** o **decreciente** y **creciente** en todo su dominio, esto depende del coeficiente del término cuadrático a , si $a > 0$, pasa de ser decreciente a ser creciente; si $a < 0$, pasa de ser creciente a ser decreciente, como se visualiza en la Figura 11.11.

Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, lo que indica que es **cóncava hacia arriba**; en consecuencia, la función tiene un valor mínimo $f(0) = 0$ en $x = 0$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, lo que indica que es **cóncava hacia abajo**; en consecuencia, la función tiene un valor máximo $f(0) = 0$ en $x = 0$.

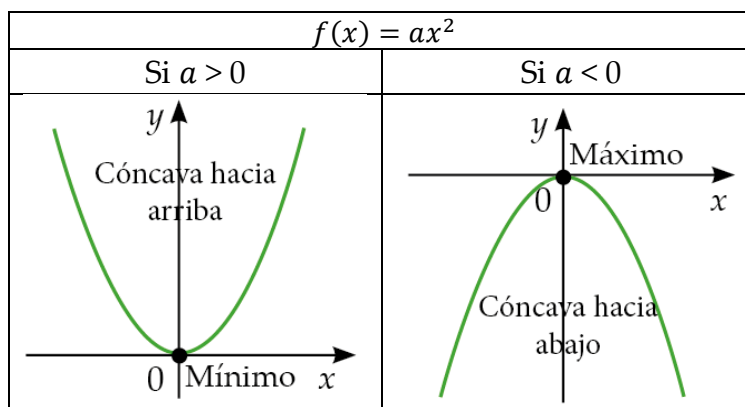


Figura 11.12. Efecto del parámetro a en la concavidad de la función $f(x) = ax^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 11.2

Comportamiento de la población de bacterias en el laboratorio de biología de la preparatoria El Rosario.

En el laboratorio de biología de la preparatoria “Comte. Víctor Manuel Tirado López” de El Rosario, se cultivaron 500 bacterias que comenzaron a reproducirse. Después de cierto tiempo, el número de bacterias comenzó a disminuir, se supone que la cantidad de bacterias al cabo de t minutos, está dada por la función $f(t) = -t^2 + 40t + 500$.

- ¿En cuánto tiempo se alcanzó la población máxima?
- ¿Cuál es la cantidad máxima de bacterias?
- ¿En cuánto tiempo se extingue la población de bacterias?

Resolución:

Para resolver este problema, lo podemos hacer explorando la tabla de valores y la gráfica o bien, por métodos analíticos.

Explorando la tabla de valores y la representación gráfica.

La función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a , b y c tienen asignado los valores $a = -1$, $b = 40$ y $c = 500$, estos se obtienen de la función propuesta.

La variable dependiente es $f(t)$: cantidad de bacterias.

La variable independiente es t : tiempo en minutos.

t	at^2	bt	c	$f(t)$
0	0	0	500	500
5	-25	200	500	675
10	-100	400	500	800
15	-225	600	500	875
20	-400	800	500	900
25	-625	1000	500	875
30	-900	1200	500	800
35	-1225	1400	500	675
40	-1600	1600	500	500
45	-2025	1800	500	275
50	-2500	2000	500	0

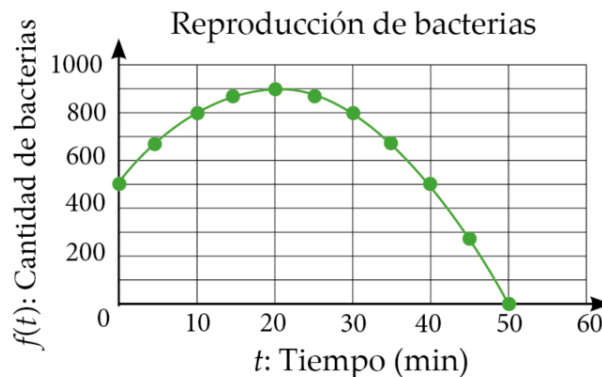


Figura 11.13. Función cuadrática.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Al inicio ($t = 0$) hay una población de 500 bacterias.

- A los 20 minutos se tiene la población máxima.
- La población máxima que se alcanza es de 900 bacterias.
- Por último, a los 50 minutos se extingue la población.

Ahora resolvámoslo por métodos analíticos:

- ¿En cuánto tiempo se alcanzó la población máxima?

Para calcular el a), nos damos cuenta de que ese punto es lo que conocemos como vértice, que es el punto más alto de la parábola, entonces las coordenadas del vértice son $V(x_V, y_V)$.

Cálculo de x_V , con la siguiente fórmula, $x_V = -\frac{b}{2a}$.

$$x_V = -\frac{40}{2(-1)}$$

$$x_V = -\frac{40}{-2}$$

$$x_V = 20$$

Hemos determinado el tiempo en el que alcanzó su máxima población, que es 20 minutos.

b) ¿Cuál fue la máxima cantidad de bacterias?

Ahora, la cantidad máxima de bacterias la determinamos, evaluando la función $f(t) = -t^2 + 40t + 500$, en $t = 20$.

$$f(t) = -t^2 + 40t + 500$$

$$f(20) = -(20)^2 + 40(20) + 500$$

$$f(20) = -400 + 800 + 500$$

$$f(20) = 900$$

A los 20 minutos se alcanza una cantidad máxima de 900 bacterias.

c) ¿En cuánto tiempo se extingue la población de bacterias?

Para determinar en cuánto tiempo se extingue la población de bacterias, calculemos los valores de t para los cuales $f(t) = 0$. Es decir, debemos resolver la ecuación $-t^2 + 40t + 500 = 0$, para ello usemos la fórmula general $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con $a = -1$, $b = 40$ y $c = 500$.

$$t = \frac{-(40) \pm \sqrt{(40)^2 - 4(-1)(500)}}{2(-1)}$$

$$t = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 2000}}{-2}$$

$$t = \frac{-40 \pm \sqrt{3600}}{-2}$$

$$t = \frac{-40 \pm 60}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-40 + 60}{-2} \quad y \quad t_2 = \frac{-40 - 60}{-2}$$

$$t_1 = \frac{20}{-2} \quad y \quad t_2 = \frac{-100}{-2}$$

$$t_1 = -10 \quad \text{y} \quad t_2 = 50$$

Como ya sabemos, de acuerdo con el contexto del problema, el tiempo no es negativo, por lo que se descarta la solución $t_1 = -10$. Por lo tanto, a los 50 minutos la población de bacterias es igual a cero (se extingue).

Evaluación formativa 11.1

1. De acuerdo con la representación de los diagramas, determina si representan una función o no. En los casos afirmativos, fundamenta y escribe la ecuación que representa a la función.

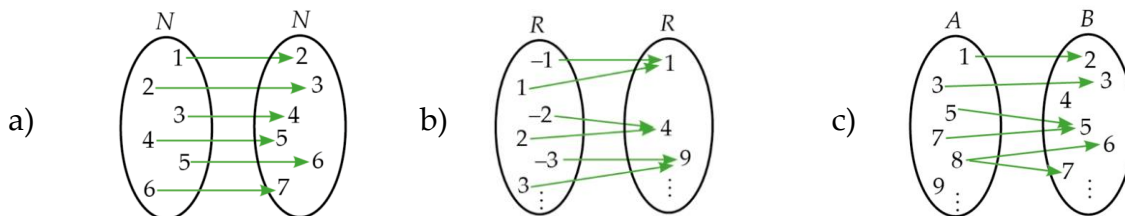


Figura 11.14 Relaciones.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

2. Determina cuáles de las siguientes gráficas representan funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

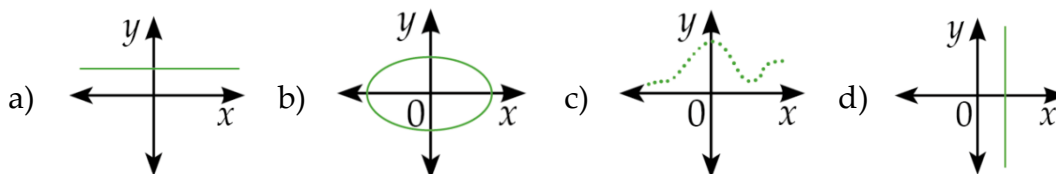


Figura 11.15. Gráficas de una ecuación.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

3. Dada la correspondencia que a cada número del conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ le hace corresponder su mitad:

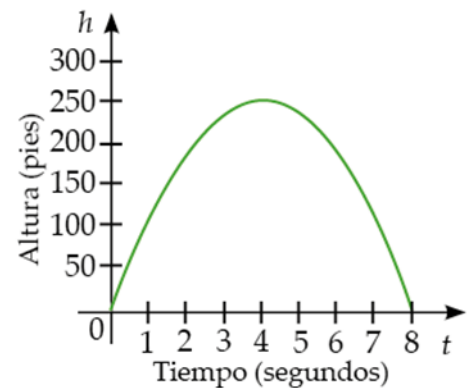
a) Representa la regla de correspondencia mediante una tabla.

- b) Representála gráficamente.
- c) Escribe la ecuación que represente esta correspondencia y fundamenta por qué es una función. Representála con f .
- d) Calcula los valores de $f(2)$, $f(6)$ y $f(10)$.
- e) ¿Para qué valores x del dominio se cumple que $f(x) = 2$, $f(x) = 6$?
4. Una persona que se ejercita caminando a una velocidad de 4 km/h quemará 210 calorías en una hora; si lo hace a 9 km/h quemará 370 calorías.
- a) Determina una función lineal, que represente las calorías quemadas en relación con la velocidad.
- b) Representa gráficamente la función, y argumenta cuál es la tendencia de calorías quemadas respecto a la velocidad con que se camina.
- c) Calcula cuántas calorías quemará si camina a 8.5 km/h.
5. Una nueva cafetería, proyecta que sus utilidades anuales $u(t)$ en miles de dólares durante los primeros 6 años en el negocio, pueden aproximarse mediante la función $u(t) = 0.2t^2 + 5.4t - 8$, donde t se mide en años.
- a) Calcula la utilidad de la cafetería al inicio. ¿Qué interpretación le das?
- b) Calcula las utilidades de la cafetería después del primer año. ¿Qué conclusión obtienes a partir de este resultado?

- c) Calcula las utilidades de la cafetería después del quinto año. ¿Qué deducción obtienes?
- d) Calcula el tiempo necesario para que la cafetería alcance el punto de equilibrio. ¿Cómo lo puedes explicar?
6. La función $D(x) = (-0.0008)(x^3 + x^2 - 72x)$, da el porcentaje de alcohol en la sangre, x horas después de haber bebido una cantidad estándar de alcohol. Suponga que, desde el punto de vista jurídico, una persona está ebria si el porcentaje de alcohol en su sangre es al menos 0.10%.
- a) Determina los tiempos en los que una persona está ebria desde el punto de vista jurídico.
- b) ¿En qué intervalos de tiempo la persona no se considere ebria?
- c) ¿Cuándo se alcanza el máximo porcentaje del alcohol en la sangre?
7. Una empresa de telefonía móvil, cobra una tarifa mensual fija de \$50.00, más \$1.00 por cada mensaje de texto enviado. Un cliente desea saber cuánto pagará, si envía un cierto número de mensajes en un mes.
8. Pedro, tiene una carpintería y necesita aumentar la producción de muebles para cumplir con los pedidos. Usa la función lineal para modelar la situación, y así tener un modelo que le permita determinar la producción de muebles.
- Datos:
- En 2 horas produce 80 muebles.
 - En 5 horas produce 200 muebles.

9. En un cierto tipo de taxi, el taxímetro marca un costo de \$30.00 por el primer kilómetro recorrido y \$20.00 por cada kilómetro adicional. Determina el costo en pesos, de un viaje en función de los kilómetros recorridos. También por medio de su función, tabla y gráfica, calcula el costo de un viaje de 15 km apoyándote de Excel.

10. Un objeto se lanza hacia arriba desde el piso. La altura del objeto por encima del suelo (en pies), en el instante t en segundos, se ilustra en la Figura 11.16.



- a) ¿Desde qué altura fue lanzado el objeto? _____
 ¿En qué instante de tiempo? _____
- b) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en chocar con el piso? _____
 ¿Cuál es su altura en ese instante de tiempo? _____
- c) Determina el intervalo donde la altura del objeto va aumentando. _____
- d) Determina el intervalo donde la altura del objeto va disminuyendo. _____
- e) Determina la altura máxima que alcanza el objeto. _____
- f) Determina la concavidad de la gráfica. Justifica tu respuesta. _____

- g) Determina la función que representa a la gráfica. _____

Figura 11.16. Función cuadrática.
 Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

11. Un arco parabólico, abarca 120 pies y tiene una altura máxima de 25 pies. Elige ejes coordenados rectangulares adecuados y determina la ecuación de la parábola. Luego, calcula la altura del arco en las abscisas que están a 10, 20 y 40 pies del centro del arco.

12. Una máquina lanzadora de pelotas, lanza una pelota con una inclinación de 45° respecto de la horizontal. Los siguientes datos representan la altura h , de la pelota, en el instante en que ha recorrido x pies horizontales.

- a) Usa la aplicación Desmos® o Excel® para obtener la función cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
- b) Determina el dominio y rango de la función de acuerdo con el contexto de los datos.

Distancia x	Altura h
20	25
40	40
60	55
80	65
100	71
120	77
140	77
160	75
180	71
200	64

Autoevaluación y coevaluación 11.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 11. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Desarrollé o interpreté un modelo matemático que representa a una situación o fenómeno. (M2-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 11, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			

Desarrolló o interpretó un modelo matemático que representa a una situación o fenómeno. (M2-C3).			
--	--	--	--

Nombre y firma de quien coevalúa

Resolución de problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica

Progresión de aprendizaje 12

Resuelve problemáticas provenientes de las áreas del conocimiento, que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y considera una interpretación geométrica de estos sistemas.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A		
	C		
	H		

Evaluación diagnóstica 12.1

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Observa la siguiente imagen y determina el valor del círculo y el triángulo.

$$\bullet + \blacktriangle = 10 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Hay más de una solución?

2. Observa la siguiente imagen y determina el valor del círculo y el triángulo que resuelva ambas ecuaciones.

$$\bullet + \blacktriangle = 10$$

$$2\bullet - \blacktriangle = 8$$

¿Hay más de una solución?

3. Grafica la siguiente ecuación.

$$y = 2x + 5$$

4. Modela dos ecuaciones de la siguiente situación:

En un grupo de tu preparatoria se realizó una encuesta de la preferencia entre el videojuego *freefire*® y *roblox*®. El día de la entrevista, asistieron 36 alumnos y se sabe que al doble de los estudiantes les gusta más *freefire*® que *roblox*®.

Ecuación 1: _____

Ecuación 2: _____

Existen situaciones que se pueden modelar con una ecuación lineal con dos incógnitas: por ejemplo, en el estacionamiento de tu preparatoria hay 30 vehículos, entre carros y motocicletas. Una ecuación que modela este planteamiento, es la siguiente: si x es el número de carros y y el número de motos, entonces:

$$x + y = 30 \text{ o bien, } y = 30 - x \text{ con } 1 \leq x \leq 30.$$

Según la ecuación anterior, si hay 1 carro tendrás 29 motocicletas, si hay 2 carros tendrás 28 motocicletas; y así sucesivamente, en total tendremos 29 soluciones. Si ese mismo día, llegó María a la escuela y contó 84 neumáticos en el estacionamiento, ¿seguirás teniendo las 29 soluciones posibles?

En ocasiones, para modelar una situación de la vida real encontramos que, en ella, se presentan varias variables relacionadas por más de una condición. Un sistema de ecuaciones lineales, puede utilizarse para representar y resolver este tipo de problemas, en los que se presentan dos o más variables de las cuales se conocen datos e información que las relacionan.

Se llama sistema de ecuaciones lineales, a todo conjunto de ecuaciones lineales formado por dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Hablar de un sistema de ecuaciones de 2×2 , hace referencia a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, un sistema de ecuaciones de 3×3 , es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y así sucesivamente.

Resolver un sistema de ecuaciones, es hallar la solución común a todas las ecuaciones del sistema, es decir, el conjunto de valores (un valor para cada incógnita) que satisfacen simultáneamente cada una de las ecuaciones.

Los métodos más comunes para resolver estos sistemas, son el método gráfico, el método de igualación, el método de sustitución y el método de reducción, mismos que se detallan a continuación.

Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Anteriormente estudiaste la representación gráfica de una función lineal, donde te diste cuenta de que corresponde a una línea recta. Al graficar un sistema con dos ecuaciones lineales, tendremos dos líneas rectas representadas en un sistema de coordenadas, donde se pueden presentar tres casos:

1. Las rectas se intersecan en un punto, por lo que el sistema tiene una única solución.
2. Las rectas son paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.
3. Las rectas coinciden, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Para graficar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

- Si la ecuación (o ambas) está en la forma $ax + by + c = 0$ o bien $ax + by = d$, determina el cero de la ecuación y la ordenada en el origen, luego grafica los dos puntos en el plano y traza la recta que pasa por dichos puntos.
- Si la ecuación (o ambas) está en la forma $y = mx + b$, usa el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente de la recta para graficar los dos puntos en el plano, luego traza la recta que pasa por dichos puntos.
- Si la ecuación no está en ninguna de esas formas, redúcela a una de ellas.
- Compara gráficamente la situación relativa de una respecto a la otra.

Ejemplo formativo 12.1

Grafica y determina la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$.

Resolución:

Como la ecuación es de la forma $y = mx + b$, usaremos el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente de la recta para graficar los dos puntos en el plano y con ello trazar la recta.

$$y = x + 1$$

La ordenada al origen es $b = 1$ y la pendiente es $m = 1$.

$$y = -x + 5$$

La ordenada al origen es $b = 5$ y la pendiente es $m = -1$.

Al graficar ambas ecuaciones tenemos

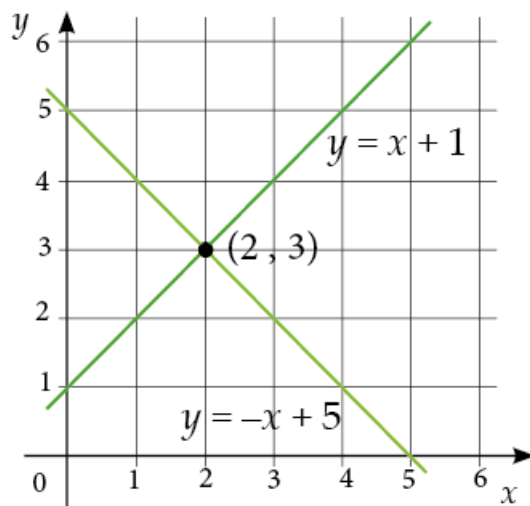


Figura 12.1. Sistema de ecuaciones lineales con una única solución.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Como se intersecan en un punto, tenemos una única solución: $x = 2$ y $y = 3$.

Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación 1: } y &= x + 1 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ecuación 2: } y &= -x + 5 \\ 3 &= -2 + 5 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo formativo 12.2

Grafica y determina la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$.

Resolución:

Como las ecuaciones son de la forma $ax + by = d$ y $ax + by + c = 0$ respectivamente, determinaremos el cero de la ecuación y la ordenada en el origen.

Ecuación 1: $x + 2y = 2$

Cero de la ecuación

Hagamos $y = 0$

$$x - 2(0) = 2$$

$$x = 2$$

La intersección en x es $(2, 0)$.

Ordenada en el origen

Hagamos $x = 0$

$$0 + 2y = 2$$

$$2y = 2$$

$$y = \frac{2}{2}$$

$$y = 1$$

La intersección en y es $(0, 1)$.

Ecuación 2: $2x + 4y - 4 = 0$

Cero de la ecuación

Hagamos $y = 0$

$$2x + 4(0) - 4 = 0$$

$$x = 2$$

La intersección en x es $(2, 0)$.

Ordenada en el origen

Hagamos $x = 0$

$$2(0) + 4y - 4 = 0$$

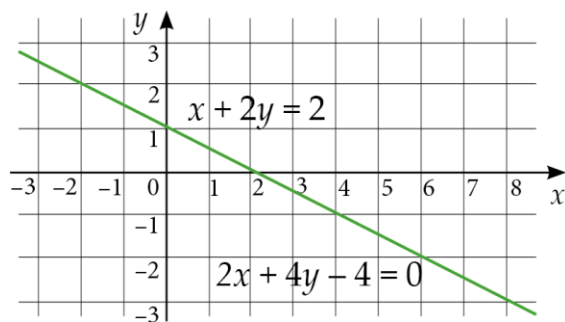
$$4y = 4$$

$$y = \frac{4}{4}$$

$$y = 1$$

La intersección en y es $(0, 1)$.

Las rectas intersecan los ejes en los mismos puntos como se muestran en la Figura 12.2.



Dado que las rectas coinciden, el sistema tiene infinitas soluciones.

Figura 12.2. Sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 12.3

Grafica y determina la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

Resolución:

Para la primera ecuación, usaremos la ordenada en el origen y la pendiente de la recta. La ecuación $y = 2x + 3$ tiene pendiente $m = 2$ y ordenada en el origen $b = 3$.

Para la segunda ecuación, usamos el cero de la ecuación y la ordenada en el origen.

Cero de la ecuación

Hagamos $y = 0$

$$4x - 2(0) = 6$$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

La intersección en x es $(\frac{3}{2}, 0)$.

Ordenada en el origen

Hagamos $x = 0$

$$4(0) - 2y = 6$$

$$-2y = 6$$

$$y = \frac{6}{-2}$$

$$y = -3$$

La intersección en y es $(0, -3)$.

Al graficar, tenemos:

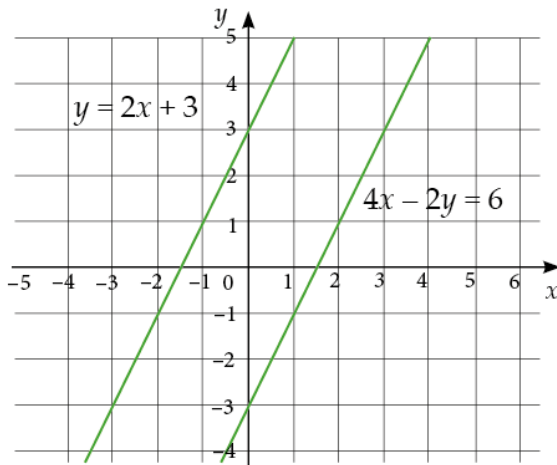


Figura 12.3. Sistema de ecuaciones lineales sin solución.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Las rectas son paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.

Interpretación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones

La solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la podemos ver de manera geométrica, dado que la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema es una recta y este par de rectas se pueden intersectar, ser paralelas o pueden coincidir. Con base a esto, lo podemos clasificar como un sistema de ecuaciones consistente o inconsistente, comparando las pendientes y las ordenadas en el origen entre las rectas de cada sistema, como lo veremos en la Tabla 12.1.

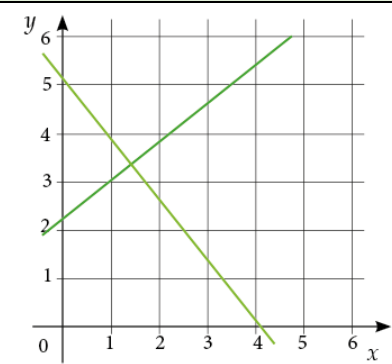
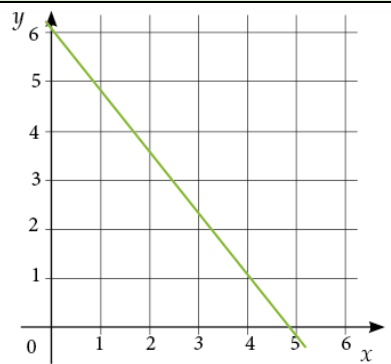
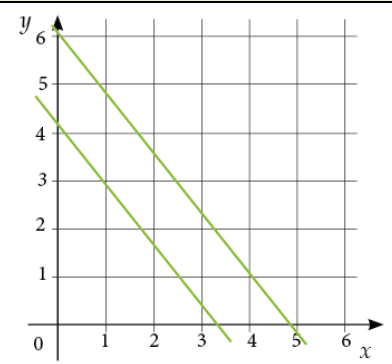
Sistemas consistentes		Sistema inconsistente
Solución única	Infinito número de soluciones	No tiene solución
Independiente	Dependiente	
		
Las rectas se intersectan en un solo punto. Las rectas tienen pendientes diferentes ($m_1 \neq m_2$).	Las rectas coinciden. Las rectas tienen pendientes iguales ($m_1 = m_2$) y ordenadas en el origen iguales ($b_1 = b_2$).	Las rectas no se intersectan. Las rectas tienen pendientes iguales ($m_1 = m_2$) y ordenadas en el origen diferentes ($b_1 \neq b_2$).

Tabla 12.1. Sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 consistentes e inconsistentes.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

De los métodos mencionados anteriormente para resolver sistemas de ecuaciones, el método de igualación, el de sustitución y el de reducción son métodos algebraicos. Estos métodos proporcionan el conjunto solución preciso, no como en el caso del método gráfico, por lo general aproximado.

Igualación	Sustitución	Reducción
Consiste en aislar la misma incógnita en las dos ecuaciones, para igualarlas,	Consiste, en elegir una incógnita para despejarla en una ecuación y luego	Consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones, por un número apropiado de

obtener una ecuación con una sola incógnita y encontrar su valor, para luego, sustituir su valor en una de las ecuaciones despejadas y así encontrar el valor de la segunda incógnita.	sustituirla en la otra ecuación del sistema, de manera que se pueda resolver una de las incógnitas, luego sustituir su valor en la ecuación despejada para encontrar el valor restante.	manera que al sumar o restar las ecuaciones, una de las incógnitas se cancele. Esto permite resolver la otra incógnita, y luego sustituir su valor en una de las ecuaciones originales para hallar el valor restante.
--	---	---

Tabla 12.2. Métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Un sistema de ecuaciones lineales, puede utilizarse para representar y resolver problemas del mundo real, en las áreas de química, economía, física, geometría, etc. en la que se presentan dos o más variables, de las cuales se conocen datos e información que las relacionan.

Ejemplo formativo 12.4

En un restaurante, la propina se divide en partes iguales entre los trabajadores. Si hubieran sido cuatro trabajadores menos, cada uno habría recibido 750 pesos, y de haber sido cuatro trabajadores más cada uno habría recibido 150 pesos. Determina el número de trabajadores y la cantidad de propina que recibió cada uno de ellos.

Resolución:

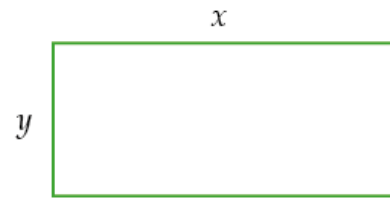
Sea x el número de trabajadores y y la propina total, de acuerdo con la información del problema, se tiene que:

- si hubieran sido cuatro trabajadores menos: $\frac{y}{x-4} = 750$
- si fueran cuatro trabajadores más: $\frac{y}{x+4} = 150$

Por lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 750x - 3000 \\ y = 150x + 600 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lo resolveremos por el **método de igualación**:



Paso 1: Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.

$$y = 750x - 3000$$

$$y = 150x + 600$$

Paso 2: Iguala las dos ecuaciones despejadas, con lo cual se obtiene una ecuación con una incógnita.

$$750x - 3000 = 150x + 600$$

Paso 3: Resuelve la ecuación que resulte.

$$750x - 150x = 600 + 3000$$

$$600x = 3600$$

$$x = \frac{3600}{600}$$

$$x = 6$$

Paso 4: Sustituye el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones obtenidas en el paso 1 para encontrar la incógnita.

$$y = 150(6) + 600$$

$$y = 900 + 600$$

$$y = 1500$$

Paso 5: Comprobación. El número de trabajadores obtenido es seis y la propina es 1500. Con cuatro trabajadores menos el número de trabajadores es dos y cada uno recibe 750 de propina. Con 4 trabajadores más el total de trabajadores es 10 y la propina recibida es de 150 pesos. Por tanto, se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, en el restaurante hay 6 trabajadores y la propina total es de \$1,500.00, por lo que a cada trabajador le corresponden \$250.00.

Ejemplo formativo 12.5

Un abuelo, compró un terreno rectangular y dijo a los nietos, que el que adivinara las medidas del terreno se quedaría con él; la única información que les dio es que el perímetro del terreno es de 60 m y que el largo mide 12 m más que su ancho. ¿Puedes determinar cuánto mide cada lado del terreno?

Resolución:

Sea x el largo y y el ancho del terreno, como se observa en la Figura 12.4.

Como el perímetro del rectángulo, es la suma de las longitudes de sus lados y es igual a 60 m, se obtiene la ecuación $2x + 2y = 60$ o bien $x + y = 30$.

Otro dato aportado, es que el largo mide 12 m más que su ancho, luego una segunda ecuación es

$x = y + 12$, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x = y + 12 \end{cases}$$

Figura 12.4. Rectángulo con medidas x , y .
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Para resolver este sistema de ecuaciones, usaremos el **método de sustitución**:

Paso 1: Despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

Si observamos las ecuaciones, en la segunda ecuación esta despejada la incógnita x

$$x = y + 12$$

Paso 2: Sustituye la expresión obtenida en el paso 1, en la otra ecuación.

$$(y + 12) + y = 30$$

Paso 3: Resuelve la ecuación que resulte.

$$2y = 30 - 12$$

$$2y = 18$$

$$y = \frac{18}{2}$$

$$y = 9$$

Paso 4: Sustituye el valor encontrado en la ecuación obtenida en el paso 1, para encontrar el valor de la otra incógnita.

$$x = 9 + 12$$

$$x = 21$$

Paso 5. Comprobación. El largo obtenido es 21 m y ancho es 9 m. El perímetro es por tanto $2(21) + 2(9) = 60$. El largo $21 - 12 = 9$. Luego se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, el largo del terreno mide 21 m y el ancho 9 m.

En física, se estudia el movimiento de un cuerpo a velocidad constante. La velocidad constante, es cuando un objeto se mueve en línea recta y su velocidad se mantiene igual en todo momento. En otras palabras, el objeto se mueve a la misma velocidad durante todo su recorrido.

La ecuación para la velocidad constante es $v = \frac{d}{t}$; donde, d es la distancia recorrida, t es el tiempo transcurrido y v la velocidad del objeto.

Ejemplo formativo 12.6

Un hombre rema 16 km en dos horas río abajo a una velocidad constante, o bien, 12 km río arriba en cuatro horas. Hallar la velocidad con la cual, rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

Resolución:

Sea x , la velocidad con la que rema en agua tranquila.

Sea y , la velocidad de la corriente del río.

Cuando se rema río abajo, la velocidad efectiva es la suma de las velocidades que llevaría el remero en agua tranquila con la velocidad del río ($x + y$), y cuando se rema río arriba es la diferencia ($x - y$). Observa la siguiente tabla:

	Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
Río abajo	16	2	8
Río arriba	12	4	3

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que tenemos es: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el **método de reducción**:

Paso 1: Suma o resta las ecuaciones del sistema para obtener una nueva ecuación con una incógnita.

$$\begin{array}{r} x + y = 8 \\ x - y = 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2x + 0 = 11$$

Paso 2: Resuelve la ecuación que resulte del paso anterior.

$$2x = 11, \text{ de donde } x = \frac{11}{2}$$

Paso 3: Sustituye el valor obtenido en el paso 2, en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita.

$$x + y = 8$$

$$y = 8 - x$$

$$y = 8 - \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{2}$$

Paso 4: Comprobación. La velocidad en agua tranquila obtenida es 5.5 km/h y la velocidad de la corriente del río es 2.5 km/h. La velocidad remando río abajo es $5.5 + 2.5 = 8$. La velocidad remando río arriba es $5.5 - 2.5 = 3$. Luego se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, la velocidad con que rema el hombre en agua tranquila es 5.5 km/h y la velocidad de la corriente del río es 2.5 km/h.

Ejemplo formativo 12.7

En una empresa cerca de tu comunidad, se invirtieron \$10,000.00 en dos bonos que pagan el 10% y 15% de interés simple. Si el interés anual es de \$1,350.00, ¿Cuánto se invirtió en cada bono?

Resolución:

Sea x el bono que paga el 10% y y el bono que paga el 15%.

Como el monto del interés anual es de \$1,350.00, resulta la ecuación $0.1x + 0.15y = 1350$. Por otro lado, el total de los bonos invertidos es de \$10,000.00, de donde se obtiene que $x + y = 10000$ y por tanto se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.1x + 0.15y = 1350 \\ x + y = 10000 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el **método de reducción**.

Sugerencia: Si al sumar o restar las dos ecuaciones, no se eliminan ninguna de las incógnitas, es necesario multiplicar una o ambas ecuaciones por un número apropiado tal, que la suma algebraica de los coeficientes de x o de y sumen cero.

Al sumar las dos ecuaciones no se elimina ninguna de las incógnitas, hay que multiplicar la primera ecuación por -10 , lo cual permite eliminar la incógnita x .

$$\begin{cases} -10(0.1x + 0.15y) = -10(1350) \\ x + y = 10000 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} -x - 1.5y = -13500 \\ x + y = 10000 \end{cases}$$

Paso 1: Suma o resta las ecuaciones del sistema para obtener una nueva ecuación con una incógnita

$$\begin{array}{r} -x - 1.5y = -13500 \\ x + y = 10000 \\ \hline 0 - 0.5y = -3500 \end{array}$$

Paso 2: Resuelve la ecuación que resulte del paso anterior.

$$y = \frac{-3500}{-0.5}$$

$$y = 7000$$

Paso 3: Sustituye el valor obtenido en el paso 2, en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita.

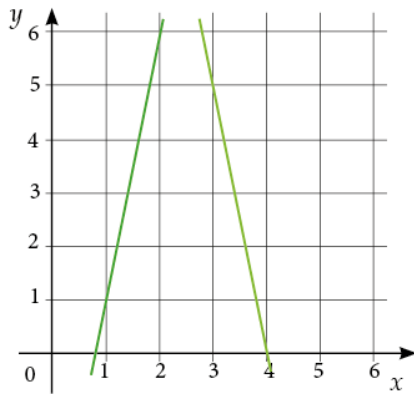
$$\begin{array}{r} x + y = 10000 \\ x = 10000 - y \\ x = 10000 - 7000 \\ x = 3000 \end{array}$$

Paso 4: Comprobación. El bono que paga el 10% es de 3000 pesos, por tanto, el interés anual es de 300 pesos. El otro bono que es de 7000 pesos paga el 15 % es decir 1050 pesos y la suma de los intereses es 1350. Luego se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, el bono que pagó el 10% fue de \$3,000.00 y el del 15% fue el de \$7,000.00.

Evaluación formativa 12.1

1. Observa la siguiente gráfica y responde lo siguiente:



a) ¿El sistema es consistente o inconsistente?
¿Por qué?

b) Determina el sistema de ecuaciones lineales.

c) Calcula la solución del sistema de ecuaciones.

Figura 12.5. Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

2. Para resolver los siguientes problemas, usa sistemas de ecuaciones lineales. Mediante el método que consideres más apropiado.

a) El perímetro de un triángulo isósceles es de 37 cm. La medida de cada uno de los lados iguales excede en 11 cm la medida del lado diferente. ¿Cuáles son las medidas de los lados?

a) Un propietario recibió \$112,000.00 por pago de renta de dos casas en un año, siendo la renta mensual de una de las casas \$1,000.00 más que la otra. ¿Cuál fue la renta mensual de cada una, si la más barata estuvo desalquilada 4 meses?

c) En el laboratorio de tu escuela ocupan una solución con alcohol al 90%, al buscar la solución encuentras dos soluciones con alcohol, una contiene alcohol al 80% y la otra contiene alcohol al 96%. ¿Qué cantidad de cada solución se deberá usar para obtener 20 litros de una solución con alcohol al 80%?

3. Las rectas en la Figura 12.6 representan a un sistema de ecuaciones de 2×2 . ¿Cuántas soluciones tiene cada sistema de ecuaciones?

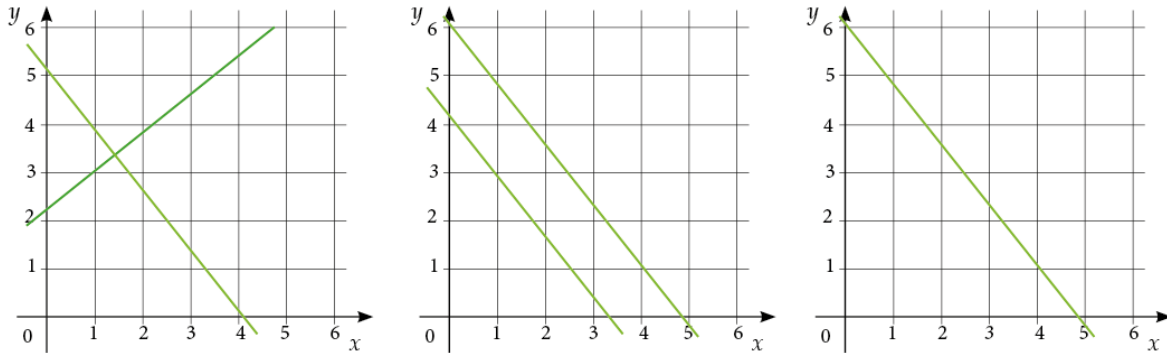


Figura 12.6. Representación gráfica de los tres casos posibles de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

-
4. Usa el método gráfico para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

b)
$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ y + 2x = 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$$

5. En el estacionamiento de tu preparatoria hay 30 vehículos, entre carros y motocicletas. María contó que hay 84 neumáticos. ¿Cuántos carros y cuántas motocicletas hay?

6. En la antigua Mesopotamia, existió una gran civilización, los babilonios, quienes fueron los primeros que se conoce hasta la fecha, en resolver sistemas de ecuaciones lineales; dicha civilización, llamaba a las incógnitas con palabras como longitud, anchura, área o volumen, aunque estas incógnitas no tuvieran relación con problemas de medidas. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica, plantea un sistema de ecuaciones como el siguiente:

- $\frac{1}{4} \text{ anchura} + \text{longitud} = 7 \text{ manos}$
- $\text{longitud} + \text{anchura} = 10 \text{ manos}$

¿A cuántas manos equivale la anchura? ¿A cuántas manos equivale la longitud?
Resuelve el sistema.

7. En un grupo de tu preparatoria, se realizó una encuesta de la preferencia entre el videojuego *freefire*® y *roblox*®, el día de la entrevista asistieron 36 alumnos y se sabe que al doble de los estudiantes les gusta más *freefire*® que *roblox*®. ¿Cuántos alumnos prefieren *Freefire*® y cuántos alumnos prefieren *roblox*®?
8. Un hombre recibiría una liquidación de \$36,000.00 por sus 15 años laborados, del cual le dijo a su esposa e hija que les daría \$27,000.00 y \$9,000.00 respectivamente. Sin embargo, al momento de ir al cajero solo disponía de 23,000 pesos. ¿Qué cantidad debe recibir su esposa e hija respetando la proporción inicial?
9. Un avión vuela a velocidad constante de 800 km/h a favor del viento, mientras que contra el mismo viento lo hace a 720 km/h. Encuentra la velocidad del viento y la velocidad del avión en aire tranquilo.

10. En tu salón, decidieron vender desayunos entre tortas y hamburguesas para sacar fondos para el día de las madres, el costo de la torta es de \$25.00 y de la hamburguesa \$32.00, el lunes vendieron 100 desayunos y recolectaron un total de \$2,815.00, ¿qué se vendió más, la torta o la hamburguesa?

Autoevaluación y coevaluación 12.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ___ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 12. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de índole diversa (M3-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 12 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			

Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicó diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de índole diversa (M3-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Bibliografía consultada

- Aguilar, A., Bravo, F. V., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas* (Segunda ed.). Pearson.
- Artacho, A. (16 de mayo de 2024). *La Pirámide de Keops y el Teorema de Tales*. Matematicascercanas.com. Disponible en: <https://matematicascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/>
- Baldor, A. (2011). *Aritmética* (2da. ed.). Grupo Editorial Patria.
- Colavita, E, (2023). *Pensamiento matemático II*. Macmillan Education.
- García, N. A., Cabrera, M. Á. (2023) *Pensamiento Matemático 2*. Conecta Editores.
- Haro, A., Esparza, D., Amaya, J. y Lechuga, S. (2024). *Pensamiento Matemático 2* (Primera ed.). México: Patria.
- Juarez, J. A., Ylé, A. y Flórez, A. (2019). *Matemáticas III. Geometría y trigonometría*. Servicios Once Ríos Editores.
- Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 41-71.
- SEP (2023a). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Diario Oficial de la Federación.
- SEP (2023b). *Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.
- SEP (2023c). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.
- SEP (2023d). *Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. Secretaría de Educación Pública.
- Spiegel, M. R., y Moyer, R. E. (2007). *Álgebra superior* (Tercera ed.). McGraw-Hill.
- Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (Novena ed.). Pearson.
- Vizcarra, F., Forneiro, R., Flórez, A., y Sosa, C. E. (2022). *Matemáticas II. Álgebra para Bachillerato Por Competencias*. Servicios Editoriales Once Ríos.
- Ylé, A., Juárez, J. A. y Flórez, A. (2017). *Matemáticas 1. Aritmética y álgebra para bachillerato por competencias*. Once Ríos.

Referencia a las fuentes de consulta de tablas

Índice de tablas

Tabla 3.1 Productos notables.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Tabla 4.2 Factorización de polinomios.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Tabla 4.1. Criba de Eratóstenes.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 7.1. Cantidad de material para concreto hidráulico.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 11.1. Diferentes representaciones de una función matemática.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 12.1. Sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 consistentes e inconsistente.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Tabla 12.2. Métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Referencia a las fuentes de consulta de imágenes

Índice de imágenes

Figura 1.1. Traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Fuente: Wordwall (Smunizch, 2024).

Figura 2.1. Crucigrama de términos matemáticos.

Fuente: Elaboración propia, (Excel, 2024).

Figura 2.2. Elementos que conforman el monomio.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 2.3. Elementos de un término algebraico.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 2.4. Área de un cuadrado.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 2.5. Área por secciones.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 3.1. Palomas.

Fuente: Susana Rosique

Figura 3.2. George Pólya.

Fuente: Instituto de matemáticas UNAM.

Figura 3.3. Distribución del huerto escolar.

Fuente: Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

Figura 3.4. Dimensiones del huerto.

Fuente: Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

Figura 3.5. Canchas de voleibol y basquetbol.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 5.1. Mínimo común múltiplo (mcm) y máximo común divisor (MCD) de números compuestos.

Fuente: Elaboración propia (PowerPoint, 2024).

Figura 5.2. División y distribución de las parcelas (máximo común divisor).

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 6.1. Relación entre perímetro y el diámetro.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.2. Longitud de la diagonal de un cuadrado de lado una unidad.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.3. Segmento de recta numérica delimitada en doce unidades simétricas.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.4. Ubicación de números reales en la recta numérica.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.5. Ubicación de dos números reales en la recta numérica.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.6. Propiedades de los números reales.

Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Figura 6.7. Representación gráfica de los diferentes paraderos de los camiones.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.8. Representación circular de partes proporcionales en grados de un entero.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.9. Representación rectangular de partes proporcionales de un entero por unidades de área.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.10. Representación gráfica de las medidas de una hectárea.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.1. Terrenos de áreas con figuras irregulares.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.2. Área con forma irregular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.3. Triángulo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.4. Base y altura de un triángulo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.5. Área del $\triangle ACB$.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.6. Región sombreada del cuadrado.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.7. Diagonales del cuadrado.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.8. Triángulos de área S .

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.9. Trapecio

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.10. Tipos de trapecio

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.11. Trapecio rectángulo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.12. Áreas A_1 y A_2 de dos terrenos.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.13. Áreas de terrenos divididas en figuras geométricas conocidas.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.14. Polígonos regulares.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.15. Apotema (a) de un polígono regular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.16. Hexágono inscrito y otro circunscrito a una circunferencia.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.17. Hexágono inscrito.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.18. Hexágono circunscrito.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.19. Círculo y circunferencia.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.20. Elementos principales del círculo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.21. Área con forma irregular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.22. Área de un sector circular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.23. Área sombreada.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.24. Área sombreada.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.25. Área de la región sombreada.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.26. Trapecio.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.27. Cabra pastando.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.28. Triángulo rectángulo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.29. Triángulo escaleno.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.30. Cuadrado $ABCD$.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.31. Trapecio de área A .

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.32. Trapecio de área B .

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.33. Hexágono.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.34. Área de un sector circular.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.35. Área formada por círculos.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.36. área sombreada.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 10.1. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.2. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.3. Triángulo ABC .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.4. Triángulo ABC .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.5. Triángulo ABC .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.6. Triángulo ABC .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.8. Distancia entre dos vértices de un triángulo.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.12. Distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta $Ax_1 + By_1 + C$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.13. Distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.14. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.15. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.16. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 10.17. Plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.1. Proceso solución de un problema real.

Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Figura 11.2. La temperatura ambiente en cierto lugar en cada instante del día.

Fuente: Elaboración propia, (GeoGebra, 2024).

Figura 11.3. La función como una máquina de entrada y salida.

Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Figura 11.4. Gráficas que representan o no a una función.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.5. Monotonía de una función.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.6. Monotonía de una función.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.7. Pendiente de una función lineal.

Fuente: Elaboración propia (Demos, 2024).

Figura 11.8. Función lineal.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Figura 11.9. Gráfica de $f(x) = x^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.10. Gráfica de $f(x) = -x^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.11. Efecto del parámetro a en la monotonía de la función $f(x) = ax^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.12. Efecto del parámetro a en la concavidad de la función $f(x) = ax^2$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.13. Función cuadrática.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Figura 11.14 Relaciones.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 11.15. Gráficas de una ecuación.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 11.16. Función cuadrática.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 12.1. Sistema de ecuaciones lineales con una única solución.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 12.2. Sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 12.3. Sistema de ecuaciones lineales sin solución.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 12.4. Rectángulo con medidas x , y .

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 12.5. Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 12.6. Representación gráfica de los tres casos posibles de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 .

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Referencia a las fuentes de consulta de los códigos QR

Índice de códigos QR

QR. 1.1. Lenguaje matemático y lenguaje natural.

Fuente: Parzibyte 2024.

QR. 1.2. Origen de algunos de los símbolos matemáticos.

Fuente: Parzibyte 2024.

QR. 2.1. Demostración geométrica de productos notables.

Fuente: Parzibyte 2024.

QR 3.1. Evaluación diagnóstica.

Fuente: Parzibyte 2024.

QR 3.2. Biografías de matemáticos: George Pólya.

Fuente: Parzibyte 2024.

QR 4.1. Video descomposición de un número en factores primos.

Fuente: parzibyte 2024.

QR 6.1. Ubicación de números irracionales en la recta numérica.

Fuente: Parzibyte, 2024.

QR 9.1 Video de ángulos asociados a una circunferencia.

Fuente: Parzibyte 2024.

Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor

Colavita, E, (2023). *Pensamiento matemático II*. Macmillan Education.

Haro, A., Esparza, D, Amaya, J. y Lechuga, Sarahi (2023). *Pensamiento matemático II*. Patria educación.

Resumen del libro "Pensamiento Matemático II: Bachillerato Semiescolarizado de la UAS"

Este libro, desarrollado por Faustino Vizcarra Parra, Rolando Alberto Forneiro Rodríguez, Victoria Bárbara Arencibia Sosa y Armando Flórez Arco, es un material didáctico esencial para los estudiantes de bachillerato semiescolarizado. Diseñado para la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Pensamiento Matemático II, se alinea con el plan de estudios de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS) 2024, conforme al Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS).

El texto se estructura en doce progresiones de aprendizaje que cubren desde el lenguaje matemático hasta la resolución de problemas aplicando sistema de ecuaciones lineales. Cada progresión incluye evaluaciones diagnósticas, situaciones contextualizadas, ejemplos formativos y evaluaciones finales, fomentando un aprendizaje integral y reflexivo.

Los autores dedican este libro a los docentes que inspiran curiosidad y amor por las matemáticas, y reconocen el papel de la inteligencia artificial como un aliado en el proceso educativo. Con una combinación de teoría, práctica y herramientas tecnológicas, este libro busca desarrollar el pensamiento probabilístico y estadístico, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos con ingenio y perseverancia.